

# Réalisation de Hodge du polylogarithme d'un schéma abélien

David Blottière

Universität Paderborn,  
Institut für Mathematik,  
Warburger Str. 100,  
33098 Paderborn, Allemagne.  
email : `blottier@math.upb.de`

## Résumé

Le résultat principal de cet article est que les courants définis par Levin dans [L] permettent de décrire le polylogarithme d'un schéma abélien au niveau topologique. Ce résultat avait été conjecturé par Levin. On en déduit une méthode pour déterminer explicitement les classes d'Eisenstein des schémas abéliens au niveau topologique. Ces classes ont un intérêt particulier car, d'après Kings (cf. [Ki]), elles ont une origine motivique. Dans [B], on utilise le résultat principal de cet article (Corollaire 4.7) pour démontrer que les classes d'Eisenstein des schémas abéliens d'Hilbert-Blumenthal dégénèrent au bord de la compactification de Baily-Borel de la base en une valeur spéciale de fonction  $L$  associée au corps de nombres totalement réel sous-jacent. On en déduit, dans ce cadre géométrique, un résultat de non annulation pour certaines classes d'Eisenstein.

## Abstract

The main result of this article is the fact that the currents defined by Levin in [L] give a description of the polylogarithm of an abelian scheme at the topological level. This result had been conjectured by Levin. This provides a method to explicit the Eisenstein classes of an abelian scheme at the topological level. These classes are of special interest since they have a motivic origin by a theorem of Kings ([Ki]). In [B], we use the main result of this article (Corollaire 4.7) to prove that the Eisenstein classes of the universal abelian scheme over an Hilbert-Blumenthal variety degenerate at the boundary of the Baily-Borel compactification of the base in a special value of an  $L$ -function associated to the underlying totally real number field. As a corollary, we get a non vanishing result for some of these Eisenstein classes in this geometric situation.

# 1 Introduction

Le polylogarithme de  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  peut être décrit explicitement par une matrice dans laquelle apparaissent les logarithmes supérieurs (les fonctions  $Li_k$ ). On peut, grâce à cette description, démontrer que les classes d'Eisenstein (construites à partir du polylogarithme et d'une racine de l'unité) sont liées aux valeurs spéciales de la fonction  $\zeta$  de Riemann. De plus, elles sont d'origine motivique et engendrent l'image du régulateur.

Beilinson et Levin ont défini et décrit le polylogarithme d'une famille de courbes elliptiques [BL]. Pour des courbes elliptiques CM obtenues en tirant par point CM la famille de courbes elliptiques universelle, les classes d'Eisenstein (construites à partir du polylogarithme et d'une section de torsion) sont d'origine motivique et fournissent un système de générateurs de l'image du régulateur (cf. [W, V-4]).

Pour une famille de variétés abéliennes, la définition du polylogarithme se déduit directement de la thèse de Wildeshaus [W]. Par analogie avec les deux situations géométriques précédentes, étant donné un schéma abélien de dimension relative supérieure à 2, on considère les questions suivantes :

- ( $Q_1$ ) Peut-on décrire explicitement le polylogarithme ?
- ( $Q_2$ ) Les classes d'Eisenstein (construites à partir du polylogarithme et d'une section de torsion) sont-elles d'origine motivique ?
- ( $Q_3$ ) Les classes d'Eisenstein sont-elles liées à des valeurs spéciales de fonctions  $L$  ?
- ( $Q_4$ ) Les classes d'Eisenstein engendrent-elles l'image du régulateur ?

Dans [Ki], Kings démontre l'origine motivique des classes d'Eisenstein d'un schéma abélien.

Dans [L], Levin associe à un schéma abélien polarisé des courants (nommés courants polylogarithmiques). Le résultat principal de cet article (Corollaire 4.7) est que ces derniers permettent de décrire le polylogarithmique d'un schéma abélien (au niveau topologique). Ceci avait été conjecturé par Levin. On répond ainsi par l'affirmative à la question ( $Q_1$ ).

Dans [B], on spécialise la situation aux schémas abéliens d'Hilbert-Blumenthal et on utilise ce résultat de façon essentielle pour démontrer que les classes d'Eisenstein dégénèrent au bord de la compactification de Baily-Borel de la base en une valeur spéciale de fonction  $L$  associée au corps de nombres totalement réel sous-jacent et en déduire que certaines sont non nulles. Ainsi, dans cette situation géométrique particulière, on répond à la question ( $Q_3$ ) par l'affirmative et on fait un premier pas dans l'étude de la question ( $Q_4$ ).

On présente maintenant le contenu de cet article.

Dans la section 2, on a rassemblé quelques définitions et propriétés concernant les courants. On introduit notamment le complexe des courants à valeurs dans un fibré vectoriel plat, objet qui intervient dans la formulation de notre résultat principal.

Dans la partie suivante, on donne deux définitions du logarithme d'un schéma abélien ; l'une issue du travail de Wildeshaus (cf. [W]), basée sur le théorème de Hain-Zucker, l'autre due à Kings (cf. [Ki]), et on les compare. On décrit ensuite le pro-système local sous-jacent au logarithme précédemment défini à l'aide du pro-fibré vectoriel plat construit par Levin (cf. [L, Part 2]) et on énonce les propriétés du logarithme, e.g. le résultat du calcul de ses images directes supérieures.

Dans la partie 4, on rappelle la définition du polylogarithme d'un schéma abélien. Celle-ci fait intervenir de façon essentielle un morphisme résidu. Le polylogarithme est une extension de modules de Hodge mixtes qui est rigide, i.e. qui est caractérisée par l'extension sous-jacente au niveau topologique. On démontre qu'il suffit de résoudre une certaine équation différentielle pour expliciter cette dernière extension (Théorème 4.5). Enfin, les courants de Levin satisfaisant cette équation différentielle, on en déduit le résultat principal de ce travail (Corollaire 4.7).

Dans la dernière section, on explique comment on peut en déduire une méthode pour expliciter, au niveau topologique, les classes d'Eisenstein d'un schéma abélien dont on rappelle auparavant la définition.

## Remerciements

Ce travail est issu de ma thèse de doctorat dirigée par Jörg Wildeshaus. Je tiens à le remercier pour m'avoir proposé ce sujet ainsi que pour les discussions que nous avons partagées.

La preuve présentée ici du Théorème 4.5 diffère de celle donnée dans ma thèse. Les échanges que j'ai eus avec Vincent Maillot et Jose I. Burgos à propos de la notion de courant dans le cadre algébrique, ainsi que les remarques du rapporteur m'ont permis d'en simplifier la démonstration. Je les remercie tous trois.

Je remercie également Andrey Levin qui, d'une part a remarqué que l'argument invoqué dans ma thèse pour justifier la lissité des courants polylogarithmiques (cf [L]) était erroné, et d'autre part a eu la gentillesse d'écrire une preuve de ce résultat dans l'appendice de cet article (cf Proposition A2.1).

## Notations et convention

Soient  $X$  un schéma de type fini, séparé et lisse sur  $\mathbb{C}$ ,  $f: Y \rightarrow Z$  un morphisme entre schémas de type fini, séparés et lisses sur  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{C}\}$ . On note

$\overline{X}$	l'ensemble $X(\mathbb{C})$ muni de la topologie transcendante,
$\overline{f}$	l'application continue de $\overline{Y}$ vers $\overline{Z}$ induite par $f$ ,
$X^\infty$	la variété différentielle $\mathcal{C}^\infty$ -réelle associée à $X$ ,
$f^\infty$	l'application lisse de $Y^\infty$ vers $Z^\infty$ induite par $f$ ,
$\mathcal{F}_{\mathbb{K}}(X)$	la catégorie des faisceaux en $\mathbb{K}$ -vectoriels sur $\overline{X}$ ,
$D_c^b(X)$	la sous-catégorie pleine de $D^b\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}(X)$ ayant pour objets les complexes dont la cohomologie est algébriquement constructible,
$SHM$	la catégorie des $\mathbb{Q}$ -structures de Hodge mixtes admissibles polarisables,
$VSHM(X)$	la catégorie des $\mathbb{Q}$ -variations de structures de Hodge mixtes admissibles (cf. [Ka]) polarisables sur $X$ ,
$\overline{\mathbb{V}}$	le (pro-)système local sous-jacent à $\mathbb{V}$ pour $\mathbb{V} \in Ob((pro-)VSHM(X))$ ,
$MHM(X)$	la catégorie des $\mathbb{Q}$ -modules de Hodge algébriques mixtes sur $X$ (cf. [S]).

Par construction,  $MHM(X)$  est muni d'un foncteur *rat* de  $MHM(X)$  vers  $Perv(X)$ , le coeur de la  $t$ -structure perverse autoduale sur  $D_c^b(X)$ , qui est fidèle et exact. Celui-ci induit un foncteur de  $D^bMHM(X)$  vers  $D^bPerv(X)$  qui composé avec le foncteur *real* de Beilinson (cf. [BBD]) fournit un foncteur d'oubli  $For: D^bMHM(X) \rightarrow D_c^b(X)$ . On dispose également d'un foncteur  $\iota_X: VSHM(X) \rightarrow MHM(X)$  qui est exact, pleinement fidèle et grâce auquel on identifie  $VSHM(X)$  à une sous-catégorie pleine de  $MHM(X)$ . Le foncteur  $For$  associe à un objet de  $VSHM(X)$  le système local sous-jacent décalé. Dans ce texte, on fait la convention suivante :

l'image d'un objet de  $VSHM(X)$  sous  $For$  est son système local sous-jacent concentré en degré 0, i.e. on ne tient pas compte du décalage.

On fixe  $i$  une racine carrée de  $-1$  dans  $\mathbb{C}$  pour la suite. Ce choix détermine une orientation canonique des variétés différentielles réelles associées aux schémas de type fini, séparés et lisses sur  $\mathbb{C}$ .

Soit  $S$  un schéma de type fini, séparé, connexe et lisse sur  $\mathbb{C}$  et soit :

$$\begin{aligned} \pi: A \rightarrow S & \quad \text{un schéma abélien de section unité } e \text{ et de dimension relative pure } d, \\ \mathcal{H} & := (R^1\pi_*\mathbb{Q})^\vee, \text{ objet pur de poids } -1 \text{ de } VSHM(S), \\ j: U \hookrightarrow A & \quad \text{l'immersion ouverte complémentaire de } e, \\ \pi_U & := \pi \circ j. \end{aligned}$$

## 2 Courants

### 2.1 Courants sur une variété différentielle

Soit  $X$  une variété différentielle de dimension pure  $n$ .

**Notations 2.1** — Soit  $p \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq p \leq n$ . On note :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X & \quad \text{le faisceau des fonctions différentielles sur } X \text{ à valeurs dans } \mathbb{C}, \\ \Omega_X^p & \quad \text{le faisceau des } p\text{-formes différentielles complexes de } X, \\ \Omega_{X,c}^p & \quad \text{le faisceau des } p\text{-formes différentielles complexes à supports compacts de } X. \end{aligned}$$

On munit  $\Omega_X^p(X)$  de la topologie donnée par [D, 17.2]. Pour  $K \subset X$  compact, l'espace des  $p$ -formes différentielles complexes sur  $X$  à support dans  $K$ , noté  $\Omega_X^p(X, K)$ , hérite de la topologie induite, qui en fait un espace de Fréchet.

**Définition 2.2** — Un  $p$ -courant sur  $X$  est une forme linéaire

$$T: \Omega_{X,c}^{n-p}(X) \rightarrow \mathbb{C}$$

dont la restriction à chacun des  $\Omega_X^p(X, K)$  ( $K \subset X$  compact) est continue. On note  $\mathcal{A}_X^p(X)$  l'espace des  $p$ -courants sur  $X$ .

On munit  $\mathcal{A}_X^p(X)$  de la topologie faible qui est induite par les semi-normes

$$T \in \mathcal{A}_X^p(X) \mapsto |T(\alpha)|$$

pour  $\alpha \in \Omega_{X,c}^{n-p}(X)$  (cf. [D, 17.8]).

Soient  $U, V$  deux ouverts de  $X$ ,  $U \subset V$ , et  $K \subset U$  un compact de  $K$ . On a une application naturelle  $\Omega_X^{n-p}(U, K) \rightarrow \Omega_X^{n-p}(V, K)$  (prolongement par 0 sur  $V \setminus U$ ). On en déduit une application de restriction

$$\text{res}_U^V: \mathcal{A}_X^p(V) := \mathcal{A}_V^p(V) \rightarrow \mathcal{A}_U^p(U) =: \mathcal{A}_X^p(U).$$

On définit ainsi un préfaisceau sur  $X$  noté  $\mathcal{A}_X^p$ . Ce préfaisceau est un faisceau (cf. [D, 17.4.2]).

Soient  $p, q \in \mathbb{N}$  tels que  $p + q \leq n$ . On a un accouplement canonique :

$$\begin{aligned} \psi_{p,q}: \mathcal{A}_X^p \otimes \Omega_X^q & \rightarrow \mathcal{A}_X^{p+q}. \\ T \otimes \omega & \mapsto T(\omega \wedge \cdot) \end{aligned}$$

En particulier,  $\psi_{p,0}$  définit une structure de  $\mathcal{O}_X$ -module sur  $\mathcal{A}_X^p$ .

## 2.2 Courants sur une variété différentielle orientée

Supposons que  $X$  est orientée. Soient  $U \subset X$  ouvert et  $p \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq p \leq n$ . On dispose alors de l'intégrale

$$\int_U : \Omega_{X,c}^n(U) \rightarrow \mathbb{C}$$

grâce à laquelle, à  $\eta \in \Omega_X^p(U)$ , on associe un  $p$ -courant sur  $U$  noté  $T_\eta$  défini par :

$$\begin{aligned} T_\eta & : \Omega_{X,c}^{n-p}(U) \rightarrow \mathbb{C} \\ \omega & \mapsto \int_U \eta \wedge \omega \end{aligned} .$$

L'association  $\eta \in \Omega_X^p(U) \mapsto T_\eta \in \mathcal{A}_X^p(U)$  donne un monomorphisme de faisceaux noté  $Int_p$ . Dans la suite, on notera simplement  $\eta$  le courant  $T_\eta$ . Les  $p$ -courants sur  $X$  qui viennent d'une  $p$ -forme différentielle sur  $X$ , via  $Int_p(X)$ , sont appelés courants lisses.

## 2.3 Courant associé à une sous-variété fermée orientée

Soit  $i : Y \hookrightarrow X$  une immersion fermée. On suppose que  $Y$  est orientée et on note  $m$  sa dimension supposée pure. Alors, l'application

$$\begin{aligned} \Omega_{X,c}^m(X) & \rightarrow \mathbb{C} \\ \omega & \mapsto \int_Y i^* \omega \end{aligned}$$

définit un  $(n - m)$ -courant que l'on note  $\delta_Y$ .

## 2.4 Différentiation des courants

Soit  $T$  un  $p$ -courant sur  $X$ . On définit la différentielle de  $T$ , notée  $dT$ , comme étant le  $(p + 1)$ -courant défini par :

$$dT(\omega) = (-1)^{p+1} T(d\omega)$$

pour  $\omega \in \Omega_{X,c}^{n-p-1}(X)$ . Le facteur  $(-1)^{p+1}$  est ajouté pour que la différentiation des courants soit compatible avec celle des formes différentielles. En effet, avec la précédente définition, si  $X$  est orientée, on a :

$$d \circ Int_p(\eta) = Int_{p+1} \circ d(\eta)$$

pour  $\eta \in \Omega_X^p(X)$ .

**Lemme 2.3** — Soient  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq p \leq n - 1$ ,  $0 \leq q \leq p + 1$ . Soient  $T$  un  $p$ -courant sur  $X$  et  $\omega \in \Omega_X^q(X)$ . Alors on a :

1.  $d \circ d(T) = 0$ .
2.  $d\psi_{p,q}(T \otimes \omega) = \psi_{p+1,q}(dT \otimes \omega) + (-1)^p \psi_{p,q+1}(T \otimes d\omega)$ .

*Démonstration* — La première égalité se déduit de la propriété  $d \circ d(\eta) = 0$  pour tout  $\eta \in \Omega_{X,c}^{n-p-1}(X)$ . Pour prouver la deuxième, on considère  $\eta \in \Omega_{X,c}^{n-p-q-1}(X)$  et on effectue le calcul suivant pour conclure.

$$\begin{aligned} d\psi_{p,q}(T \otimes \omega)(\eta) &= (-1)^{p+q+1} T(\omega \wedge d\eta) \\ &= (-1)^{p+1} T(d(\omega \wedge \eta) - d\omega \wedge \eta) \\ &= dT(\omega \wedge \eta) + (-1)^{p+2} T(d\omega \wedge \eta) \\ &= \psi_{p+1,q}(dT \otimes \omega)(\eta) + (-1)^p \psi_{p,q+1}(T \otimes d\omega)(\eta). \end{aligned}$$

□

## 2.5 Courants à valeurs dans un fibré vectoriel

Soient  $E$  un fibré vectoriel complexe de rang  $N$  au-dessus de  $X$  et  $p \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq p \leq n$ .

**Définition 2.4** – *Le faisceau des  $p$ -courants sur  $X$  à valeurs dans  $E$  est*

$$\mathcal{A}_X^p(E) := \mathcal{A}_X^p \otimes_{\mathcal{O}_X} E.$$

Comme  $\mathcal{A}_X^p(E)$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module, le faisceau  $\mathcal{A}_X^p(E)$  est fin. Dans le cas où la variété est orientée, on a un monomorphisme de faisceaux

$$Int_p \otimes Id_E : \Omega_X^p(E) \rightarrow \mathcal{A}_X^p(E).$$

Un  $p$ -courant sur  $X$  à valeurs dans  $E$  est dit lisse s'il provient, via  $Int_p \otimes Id_E$ , d'une  $p$ -forme différentielle sur  $X$  à valeurs dans  $E$ .

## 2.6 Notion de convergence

On cherche à définir une notion de convergence pour les courants à valeurs dans un fibré vectoriel.

### 2.6.1 Cas où le fibré est trivial

Si  $E$  est le fibré trivial de rang  $N$  sur  $X$ , alors on a la décomposition

$$\mathcal{A}_X^p(E) = (\mathcal{A}_X^p)^N$$

relativement à la base canonique de  $\mathbb{C}^N$  notée  $(e_1, \dots, e_N)$  et on a une notion naturelle de convergence sur  $\Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$ . En effet, soit  $(T_k)_{k \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$  et  $T \in \Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$ . Pour tout  $k \geq 0$ , on écrit

$$T_k = \sum_{1 \leq i \leq N} T_k^i e_i$$

la décomposition de  $T_k$  relativement à la base canonique de  $\mathbb{C}^N$ . On décompose de même  $T$ ,

$$T = \sum_{1 \leq i \leq N} T^i e_i.$$

**Définition 2.5** – *Dans cette situation, on dit que  $(T_k)_{k \geq 0}$  tend vers  $T$  dans  $\Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$  et on écrit  $T_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} T$  si pour tout  $(\omega_1, \dots, \omega_N) \in (\Omega_{X,c}^{n-p}(X))^N$*

$$(T_k^1(\omega_1), \dots, T_k^N(\omega_N)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (T^1(\omega_1), \dots, T^N(\omega_N)) \text{ dans } \mathbb{C}^N.$$

La notion de convergence de la Définition 2.5 est invariante par automorphisme, comme on le vérifie ci-dessous. Soit  $\varphi : E \rightarrow E$  un automorphisme de fibré vectoriel donné relativement à la base canonique de  $\mathbb{C}^N$ , par

$$\begin{aligned} X &\rightarrow GL_N(\mathbb{C}) \\ x &\mapsto (\varphi_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq N} \end{aligned}$$

où  $\varphi_{ij} \in \mathcal{O}_X(X)$ . Alors,  $\varphi$  induit un isomorphisme

$$Id \otimes \varphi^* : \Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E)) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$$

qu'on explicite. Si  $T = \sum_{1 \leq i \leq N} T^i e_i$ , alors

$$\begin{aligned} Id \otimes \varphi^*(T) &= \sum_{1 \leq i \leq N} \sum_{1 \leq j \leq N} T^i \otimes \varphi_{ji} e_j \\ &= \sum_{1 \leq i \leq N} \sum_{1 \leq j \leq N} \varphi_{ji} T^i \otimes e_j \\ &= \sum_{1 \leq j \leq N} \left( \sum_{1 \leq i \leq N} \varphi_{ji} T^i \right) \otimes e_j. \end{aligned}$$

De cette formule, on déduit le

**Lemme 2.6** — *Etant donnés  $(T_k)_{k \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$  et  $T \in \Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$ , on a l'équivalence :*

$$T_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} T \iff Id \otimes \varphi^*(T_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} Id \otimes \varphi^*(T).$$

La notion de convergence de la Définition 2.5 est locale. En effet, on a le

**Lemme 2.7** — *Soient  $(T_k)_{k \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$  et  $T \in \Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$ , soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $X$ . On a :*

$$T_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} T \iff \left( \forall i \in I \quad res_{U_i}^X(T_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} res_{U_i}^X(T) \right).$$

*Démonstration* — L'implication  $\Rightarrow$  est triviale. Pour démontrer l'autre, il suffit d'utiliser une partition de l'unité adaptée au recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$ .  $\square$

## 2.6.2 Cas général

**Définition 2.8** — *Soit  $E$  un fibré vectoriel complexe de rang  $N$  sur  $X$ . Une famille  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  où*

- a)  $(U_i)_{i \in I}$  est un recouvrement ouvert de  $X$ ,
- b) pour tout  $i \in I$ ,  $\varphi_i$  est un isomorphisme de fibrés vectoriels,

$$\begin{array}{ccc} U_i \times \mathbb{C}^N & \xrightarrow{\varphi} & E_{U_i} \\ \downarrow pr_1 & \swarrow & \\ U_i & & \end{array}$$

est appelée famille de trivialisations locales de  $E$ .

On étend la Définition 2.5 comme suit.

**Définition 2.9** — *Si  $E$  est un fibré vectoriel complexe de rang  $N$  sur  $X$ , si  $(T_k)_{k \geq 0}$  est une suite d'éléments de  $\Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$  et  $T \in \Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$ , on dit que*

$$(T_k)_{k \geq 0} \text{ tend vers } T \text{ dans } \Gamma(X, \mathcal{A}_X^p(E))$$

*si et seulement si, il existe une famille de trivialisations locales de  $E$   $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  telle que pour tout  $i \in I$ ,*

$$Id \otimes \varphi_i^*(res_{U_i}^X(T_k)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} Id \otimes \varphi_i^*(res_{U_i}^X(T)) \text{ dans } \Gamma(U_i, \mathcal{A}_{U_i}^p(U_i \times \mathbb{C}^N))$$

*au sens de la Définition 2.5.*

**Remarque 2.10** – Les Lemmes 2.6 et 2.7 assurent que cette définition est compatible avec la définition 2.5 et que, lorsque la condition de convergence vaut pour une famille de trivialisations locales, elle vaut pour toutes.

## 2.7 Complexe des courants associé à un fibré vectoriel plat

Soit  $E$  un fibré vectoriel complexe de rang  $N$  au-dessus de  $X$  muni d'une connexion plate  $\nabla : E \rightarrow \Omega_X^1 \otimes E$ . On note  $(\Omega_X^\bullet \otimes E, \nabla^\bullet)$  le complexe de de Rham de  $(E, \nabla)$ .

Soit  $\nabla^p : \mathcal{A}_X^p \otimes E \rightarrow \mathcal{A}_X^{p+1} \otimes E$  l'unique morphisme de faisceaux de  $\mathcal{O}_X$ -modules caractérisé par la condition suivante. Pour tout  $U$  ouvert simplement connexe de  $X$ ,  $T \in \Gamma(U, \mathcal{A}_X^p)$ ,  $s \in \Gamma(U, E)$  avec

$$\nabla(s) = \sum_{i \in I_s} \omega_i \otimes s_i$$

où  $\omega_i \in \Gamma(U, \Omega_X^1)$  et  $s_i \in \Gamma(U, E)$  pour tout  $i$  dans l'ensemble d'indices  $I_s$  :

$$\nabla^p(T \otimes s) = dT \otimes s + (-1)^p \sum_{i \in I_s} \psi_{1,p}(T \otimes \omega_i) \otimes s_i.$$

On peut vérifier que ce morphisme est bien  $\mathcal{O}_X$ -linéaire en chacune des deux composantes au moyen du 2. du lemme 2.3.

**Lemme 2.11** – Pour  $p \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq p \leq n-1$ ,  $\nabla^{p+1} \circ \nabla^p = 0$ .

*Démonstration* – L'assertion est de nature locale. On peut donc supposer que  $E$  est le fibré trivial de rang  $N$  et que  $\nabla$  est la connexion de Gauß-Manin. Il suffit en fait de considérer le cas  $N = 1$ . Mais alors, l'assertion résulte du 1. du lemme 2.3.  $\square$

**Définition 2.12** – Le complexe des courants sur  $X$  à valeurs dans  $E$  est le complexe

$$[\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \underset{\text{deg. } 0}{\mathcal{A}_X^0(E)} \xrightarrow{\nabla^0} \underset{\text{deg. } 1}{\mathcal{A}_X^1(E)} \xrightarrow{\nabla^1} \underset{\text{deg. } 2}{\mathcal{A}_X^2(E)} \xrightarrow{\nabla^2} \cdots \xrightarrow{\nabla^{n-1}} \underset{\text{deg. } n}{\mathcal{A}_X^n(E)} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots].$$

On suppose maintenant que  $X$  est orientée.

**Proposition 2.13** – Le morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccccccccc} [\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \Omega_X^0(E) \xrightarrow{\nabla^0} \Omega_X^1(E) \xrightarrow{\nabla^1} \cdots \xrightarrow{\nabla^{n-1}} \Omega_X^n(E) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots] \\ \parallel \qquad \qquad \downarrow \text{Int}_0 \otimes Id \qquad \downarrow \text{Int}_1 \otimes Id \qquad \qquad \downarrow \text{Int}_n \otimes Id \qquad \parallel \\ [\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{A}_X^0(E) \xrightarrow{\nabla^0} \mathcal{A}_X^1(E) \xrightarrow{\nabla^1} \cdots \xrightarrow{\nabla^{n-1}} \mathcal{A}_X^n(E) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots] \end{array}$$

est un quasi-isomorphisme.

*Démonstration* – L'assertion est de nature locale. Il suffit de prouver le résultat pour  $X$  une boule ouverte de  $\mathbb{R}^n$  et  $E = X \times \mathbb{C}^N \xrightarrow{pr_1} X$  le fibré trivial au-dessus de  $X$  muni de la connexion de Gauss-Manin  $\nabla_{GM}$ . On se ramène alors au cas  $N = 1$ . Pour la preuve du résultat dans cette situation, on renvoie à [GH, p. 382].  $\square$

**Corollaire 2.14** – La suite

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\nabla) \xrightarrow{\text{Int}_0 \otimes Id} \mathcal{A}_X^0(E) \xrightarrow{\nabla^0} \mathcal{A}_X^1(E) \xrightarrow{\nabla^1} \cdots \xrightarrow{\nabla^{n-1}} \mathcal{A}_X^n(E) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte longue.



### 3 Le logarithme d'un schéma abélien

#### 3.1 Définition issue de la thèse de Wildeshaus [W]

##### 3.1.1 Cas absolu

**Notation 3.1** – On désigne par  $VSHMU(A)$  la sous-catégorie pleine de  $VSHM(A)$  dont les objets sont les variations unipotentes, i.e. qui admettent une filtration dont les gradués sont des variations constantes.

On suppose dans cette partie que  $S = \text{Spec}(\mathbb{C})$  et on fixe  $a \in A(\mathbb{C})$ . La  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $\mathbb{Q}[\pi_1(\bar{A}, a)]$  est munie d'une augmentation canonique  $\varepsilon: \mathbb{Q}[\pi_1(\bar{A}, a)] \rightarrow \mathbb{Q}$  dont on note  $\mathfrak{a}_a$  le noyau.

La théorie des intégrales itérées de Chen permet de munir chacun des  $\mathbb{Q}[\pi_1(\bar{A}, a)]/\mathfrak{a}_a^n$  de  $\mathbb{Q}$ -structures de Hodges mixtes canoniques pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . De plus, les morphismes de projection

$$pr_{n,m}: \mathbb{Q}[\pi_1(\bar{X}, x)]/\mathfrak{a}^n \rightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(\bar{X}, x)]/\mathfrak{a}^m, \quad m, n \in \mathbb{N}^*, \quad m \leq n$$

sont des morphismes de  $\mathbb{Q}$ -structures de Hodge. On dispose ainsi d'une pro- $\mathbb{Q}$ -structure de Hodge mixte sur le pro- $\mathbb{Q}$ -vectoriel

$$\mathbb{Q}[\pi_1(\bar{A}, a)]^\wedge := \varprojlim_{n \geq 1} \mathbb{Q}[\pi_1(\bar{A}, a)]/\mathfrak{a}_a^n,$$

où les morphismes de transitions de la limite projective sont les projections  $pr_{n,m}$ , qui est telle que :

- a) le morphisme de structure de  $\mathbb{Q}$ -algèbre,  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(\bar{A}, a)]^\wedge$  est sous-jacent à un morphisme de pro-structures de Hodge mixtes  $1: \mathbb{Q}(0) \rightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(\bar{A}, a)]^\wedge$ ,
- b) la multiplication dans  $\mathbb{Q}[\pi_1(\bar{A}, a)]^\wedge$  est un morphisme de la catégorie pro- $SHM$ ,
- c) pour  $\mathbb{V} \in \text{Ob}(VSHMU(A))$ , la représentation de monodromie  $\pi_1(\bar{A}, a) \rightarrow \text{End}(\bar{\mathbb{V}}_a)$  induit un morphisme de la catégorie pro- $SHM$   $\rho_a: \mathbb{Q}[\pi_1(\bar{A}, a)]^\wedge \rightarrow \underline{\text{End}}(\mathbb{V}_a)$ .

On peut alors rappeler l'énoncé du théorème de Hain-Zucker.

**Théorème 3.2** [HZ, Thm 1.6] – *Le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} VSHMU(A) & \rightarrow & \left( \begin{array}{c} V \in \text{Ob}(SHM) \text{ muni d'un morphisme de pro-}SHM \\ \mathbb{Q}[\pi_1(\bar{A}, a)]^\wedge \rightarrow \underline{\text{End}}(V) \end{array} \right) \\ \mathbb{V} & \mapsto & (\mathbb{V}_a, \rho_a) \end{array}$$

*est une équivalence de catégories.*

**Définition 3.3** – On applique ce théorème à  $\mathbb{Q}[\pi_1(\bar{A}, a)]^\wedge$  muni de la représentation donnée par la multiplication. On obtient un objet de pro- $VSHMU(A)$ , le logarithme de  $A$  que l'on note  $\mathcal{L}og_{A,a}$  ou simplement  $\mathcal{L}og_a$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la variété abélienne considérée.

Le logarithme est en outre caractérisé par la propriété universelle suivante.

**Théorème 3.4** – *Le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} VSHMU(A) & \rightarrow & Ab \\ \mathbb{V} & \mapsto & \text{Hom}_{SHM}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{V}_a) \end{array}$$

*est pro-représenté par  $\mathcal{L}og_a$ , i.e. on a une bijection naturelle :*

$$\text{Hom}_{\text{pro-}VSHMU(A)}(\mathcal{L}og_a, \mathbb{V}) \rightarrow \text{Hom}_{SHM}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{V}_a) \quad , \quad \varphi \mapsto \varphi \circ 1.$$

Cet énoncé est équivalent au théorème de Hain-Zucker. Le pro-système local sous-jacent à  $\mathcal{L}og_{A,a}$  est lui aussi caractérisé par une propriété universelle.

**Théorème 3.5** – *Le foncteur*

$$\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}(A) \underset{\text{pleine}}{\supseteq} \left( \begin{array}{c} \mathbb{Q}\text{-systèmes locaux sur } \overline{A} \text{ admettant} \\ \text{une filtration dont les gradués} \\ \text{sont des faisceaux constants} \end{array} \right) \begin{array}{l} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-vect} \\ \mapsto \mathbb{V}_a \end{array}$$

est pro-représenté par  $\overline{\mathcal{L}og}_a$ , i.e. on a une bijection naturelle :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}\text{-}\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}(A)}(\overline{\mathcal{L}og}_a, \mathbb{V}) \rightarrow \mathbb{V}_a \quad , \quad \varphi \mapsto \varphi_a(1).$$

### 3.1.2 Cas relatif

**Notation 3.6** – Soit  $VSHMU(A, \pi)$  la sous-catégorie pleine de  $VSHM(A)$  dont les objets sont les variations unipotentes relativement à  $\pi$ , i.e. qui admettent une filtration dont les gradués sont dans l'image de  $\pi^*: VSHM(S) \rightarrow VSHM(A)$ .

Soit  $s \in S(\mathbb{C})$  et  $a := e(s) \in \mathbb{A}(\mathbb{C})$ . D'après le théorème de Ehresmann,  $\overline{\pi}$  est une fibration localement triviale et donc on a la suite exacte scindée suivante :

$$1 \longrightarrow \pi_1(\overline{A}_s, a) \longrightarrow \pi_1(\overline{A}, a) \xrightarrow[\overline{\pi}_*]{\overline{e}_*} \pi_1(\overline{S}, s) \longrightarrow 1 \quad .$$

On définit une action de  $\pi_1(\overline{A}, a) = \pi_1(\overline{A}_s, a) \rtimes \pi_1(\overline{S}, s)$  sur  $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_s, a)]^\wedge$  en faisant agir  $\pi_1(\overline{A}_s, a)$  par multiplication à gauche et  $\pi_1(\overline{S}, s)$  par conjugaison. On a ainsi construit un pro-système local de  $\mathbb{Q}$ -vectoriels sur  $\overline{A}$  que l'on note  $\mathbb{V}$ . On vérifie que la fibre en  $s' \in S(\mathbb{C})$  de  $\mathbb{V}$  s'identifie canoniquement à  $\overline{\mathcal{L}og}_{A_{s'}, e(s')}$ . Ainsi, fibre à fibre,  $\mathbb{V}$  est muni d'une filtration par le poids et d'une filtration de Hodge d'après la cas absolu précédemment traité.

**Théorème 3.7** [W, I-Thm 3.3] – *Le pro-système local  $\mathbb{V}$  muni de ces deux filtrations définies fibre à fibre définit un objet de  $\mathrm{pro}\text{-}VSHMU(A, \pi)$ .*

**Définition 3.8** – *L'objet de  $\mathrm{pro}\text{-}VSHMU(A, \pi)$  du théorème précédent est appelé logarithme de  $A/S$  et est noté  $\mathcal{L}og_{A/S, s}$  ou simplement  $\mathcal{L}og_s$  lorsqu'il n'y a pas de confusion possible quant au schéma abélien que l'on considère.*

On a un morphisme de variations de  $\mathbb{Q}$ -structures de Hodge sur  $S$  canonique,  $1 : \mathbb{Q}(0) \rightarrow e^* \mathcal{L}og_s$  qui est induit par la structure de  $\mathbb{Q}$ -algèbre de  $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_s, a)]^\wedge$ . On caractérise maintenant  $\mathcal{L}og_s$  et  $\overline{\mathcal{L}og}_s$  par les propriétés suivantes qui sont des versions relatives des Théorèmes 3.4 et 3.5.

**Théorème 3.9** [W, I-Thm 3.5] – *La transformation naturelle entre foncteurs de  $VSHMU(A, \pi)$  vers  $VSHM(S)$  :*

$$\begin{array}{ccc} \pi_* \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{L}og_s, \cdot) & \rightarrow & e^* \\ \varphi & \mapsto & e^*(\varphi)(1) \end{array}$$

*est un isomorphisme de foncteurs.*

**Théorème 3.10** [W, I-Thm 3.5] – *La transformation naturelle entre foncteurs de la catégorie*

$$\left( \begin{array}{c} \mathbb{Q}\text{-systèmes locaux sur } \overline{A} \text{ admettant une filtration dont les} \\ \text{gradués sont des pullbacks par } \pi \text{ de systèmes locaux sur } \overline{S} \end{array} \right) \underset{\text{pleine}}{\subseteq} \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}(A)$$

*vers la catégorie des  $\mathbb{Q}$ -systèmes locaux sur  $\overline{S}$  :*

$$\begin{array}{ccc} \pi_* \underline{\text{Hom}}(\overline{\mathcal{L}og_s}, \cdot) & \rightarrow & \overline{e}^* \\ \varphi & \mapsto & (\overline{e}^* \varphi)(\overline{1}) \end{array}$$

*est un isomorphisme de foncteurs.*

Soit  $s' \in S(\mathbb{C})$ . Tout chemin allant de  $s'$  à  $s$  induit un isomorphisme de pro-variations  $\mathcal{L}og_{s'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}og_s$ . La propriété universelle du logarithme implique que cet isomorphisme est en fait indépendant du choix de chemin. Ainsi, on note simplement  $\mathcal{L}og$  l'objet  $\mathcal{L}og_s$ . On pourra également noter le logarithme  $\mathcal{L}og_{A/S}$  lorsque l'on voudra préciser le schéma abélien.

### 3.2 Comparaison avec la définition du logarithme due à Kings [Ki]

Soient  $s \in S(\mathbb{C})$  et  $a := e(s)$ . On note  $\mathfrak{a}_s$  le noyau de l'augmentation  $\varepsilon_s : \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_s, a)] \rightarrow \mathbb{Q}$ . On a une suite exacte de  $\mathbb{Q}$ -vectoriels munie d'un scindage canonique :

$$(\Sigma) \quad 0 \longrightarrow \mathfrak{a}_s / \mathfrak{a}_s^2 \longrightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_s, a)] / \mathfrak{a}_s^2 \xrightleftharpoons[\underset{1_s^{(1)}}{\overleftarrow{\varepsilon_s^{(1)}}}]{\overrightarrow{\varepsilon_s^{(1)}}} \mathbb{Q} \longrightarrow 0.$$

dans laquelle  $\varepsilon_s^{(1)}$  (resp.  $1_s^{(1)}$ ) est l'augmentation (resp. le morphisme de structure de  $\mathbb{Q}$ -algèbre) de  $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_s, a)] / \mathfrak{a}_s^2$ . On munit chacun des termes de cette suite d'une action de  $\pi_1(\overline{A}, a) = \pi_1(\overline{A}_s, a) \rtimes \pi_1(\overline{S}, s)$ . Le groupe  $\pi_1(\overline{A}, a)$  agit trivialement sur  $\mathbb{Q}$ . Sur  $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_s, a)] / \mathfrak{a}_s^2$  et  $\mathfrak{a}_s / \mathfrak{a}_s^2$ ,  $\pi_1(\overline{A}_s, a)$  agit par multiplication et  $\pi_1(\overline{S}, s)$  agit par conjugaison. On remarque que  $\pi_1(\overline{A}_s, a)$  agit trivialement sur  $\mathfrak{a}_s / \mathfrak{a}_s^2$ . On vérifie alors que  $(\Sigma)$  est une suite exacte de  $\pi_1(\overline{A}, a)$ -modules (non scindée si  $d \geq 1$ ), que l'on considère comme une suite exacte de  $\mathbb{Q}$ -systèmes locaux sur  $\overline{A}$ .

On va maintenant installer des filtrations sur ces systèmes locaux. Pour tout  $s' \in S(\mathbb{C})$ , on applique le foncteur «restriction à  $\overline{A}_{s'}$ » à  $(\Sigma)$ . Le résultat est une suite exacte de  $\pi_1(\overline{A}_{s'}, e(s'))$ -modules canoniquement isomorphe à :

$$0 \rightarrow \mathfrak{a}_{s'} / \mathfrak{a}_{s'}^2 \rightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_{s'}, e(s'))] / \mathfrak{a}_{s'}^2 \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow 0.$$

Chacun de ces systèmes locaux est sous-jacent à une variation de structures de Hodge sur  $A_{s'}$ . En effet, sur  $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_{s'}, e(s'))] / \mathfrak{a}_{s'}^2$ , les filtrations proviennent de la théorie des intégrales itérées de Chen (voir la partie 3.1.1) et l'augmentation  $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_{s'}, e(s'))] / \mathfrak{a}_{s'}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$  est sous-jacente à un morphisme de variations de structures de Hodge de but la variation triviale  $\mathbb{Q}(0)$ . Les filtrations sur  $\mathfrak{a}_{s'} / \mathfrak{a}_{s'}^2$  sont celles induites par celles de  $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_{s'}, e(s'))] / \mathfrak{a}_{s'}^2$ . En fait,  $\mathfrak{a}_{s'} / \mathfrak{a}_{s'}^2$  est la variation constante sur  $A_{s'}$  associée à  $H_1(\overline{A}_{s'}, \mathbb{Q})$ .

Ainsi, sur chacune des fibres de  $\overline{\pi}$ , on dispose de filtrations pour les trois systèmes locaux. Il existe trois variations de  $\mathbb{Q}$ -structure de Hodge admissibles sur  $A$  dont les systèmes locaux sous-jacents et les filtrations fibre à fibre coïncident avec les données précédentes.

- a) On note (abusivement)  $\mathfrak{a}_s/\mathfrak{a}_s^2$  le système local sur  $\overline{B}$  associé à  $\mathfrak{a}_s/\mathfrak{a}_s^2$  muni de l'action de  $\pi_1(\overline{S}, s)$  par multiplication. L'isomorphisme canonique  $\mathfrak{a}_s/\mathfrak{a}_s^2 \rightarrow H_1(\overline{A}_s, \mathbb{Q})$  fournit un isomorphisme de systèmes locaux sur  $\overline{S}$  entre  $\mathfrak{a}_s/\mathfrak{a}_s^2$  et  $(R^1\pi_*\mathbb{Q})^\vee$ . On rappelle que  $\mathcal{H}$  désigne la variation de structures de Hodge pures de poids  $-1$   $(R^1\pi_*\mathbb{Q})^\vee$ . On équipe le  $\mathbb{Q}$ -système local  $\mathfrak{a}_s/\mathfrak{a}_s^2$  sur  $\overline{A}$  de la structure de  $\mathbb{Q}$ -variations de  $\pi^*\mathcal{H}$  ( $\pi_1(\overline{A}_s, a)$  agit trivialement sur  $\mathfrak{a}_s/\mathfrak{a}_s^2$ ).
- b) Pour  $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_s, a)]/\mathfrak{a}_s^2$ , on est dans la situation d'une variation sur un espace de chemins (cf. [HZ] et la construction de  $\mathcal{L}og$  [W, I-Thm 3.3]). Les filtrations définies précédemment fibre à fibre définissent donc une  $\mathbb{Q}$ -variation admissible sur  $A$  notée  $\mathcal{L}og_{A,s}^{(1)}$  ou simplement  $\mathcal{L}og_s$  lorsque le schéma abélien est implicite, et on munit le  $\mathbb{Q}$ -système local  $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}_s, a)]/\mathfrak{a}_s^2$  sur  $\overline{A}$  de cette structure.
- c) Pour  $\mathbb{Q}$ , on choisit  $\mathbb{Q}(0)$ .

Les morphismes figurant dans la suite exacte  $(\Sigma)$  respectent les filtrations, d'où une suite exacte dans  $VSHM(A)$  :

$$(\Sigma') \quad 0 \rightarrow \pi^*\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}og_s^{(1)} \rightarrow \mathbb{Q}(0) \rightarrow 0.$$

On remarque que, puisque  $\mathrm{Hom}_{VSHM(A)}(\mathbb{Q}(0), \pi^*\mathcal{H}) = 0$ , en raison des poids, le terme médian d'une suite exacte courte représentant un élément de  $\mathrm{Ext}_{VSHM(A)}^1(\mathbb{Q}(0), \pi^*\mathcal{H})$  dans la description des Ext-groupes de Yoneda est bien défini à isomorphisme unique près. On notera ainsi également  $\mathcal{L}og_s^1$  la classe dans  $\mathrm{Ext}_{VSHM(A)}^1(\mathbb{Q}(0), \pi^*\mathcal{H})$  de la suite exacte  $(\Sigma')$ .

On cherche maintenant à caractériser  $\mathcal{L}og_s^{(1)}$  dans le groupe d'extensions  $\mathrm{Ext}_{VSHM(A)}^1(\mathbb{Q}(0), \pi^*\mathcal{H})$ . La suite spectrale de Leray de la composition  $\mathrm{RHom}_{MHM(S)}(\mathbb{Q}(0), \cdot) \circ \pi_*$  appliquée à  $\pi^*\mathcal{H}$  donne la suite exacte courte scindée :

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_{MHM(S)}^1(\mathbb{Q}(0), \mathcal{H}) & \xrightleftharpoons[\pi_*]{e^*} & H^1\mathrm{RHom}_{MHM(A)}(\mathbb{Q}(0), \pi^*\mathcal{H}) \\ & & \downarrow \\ & & \mathrm{Hom}_{MHM(S)}(\mathbb{Q}(0), H^1\pi_*\pi^*\mathcal{H}) \longrightarrow 0. \end{array}$$

En effet pour des raisons de poids,  $\mathrm{Ext}_{MHM(S)}^2(\mathbb{Q}(0), \mathcal{H}) = 0$ . D'autre part  $H^1\pi_*\pi^*\mathcal{H} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^\vee$  (formule de projection) et donc, par dualité,

$$\mathrm{Hom}_{MHM(S)}(\mathbb{Q}(0), H^1\pi_*\pi^*\mathcal{H}) = \mathrm{Hom}_{MHM(S)}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = \mathrm{End}_{VSHM(S)}(\mathcal{H}).$$

De plus, le foncteur exact et pleinement fidèle canonique  $\iota_S: VSHM(S) \rightarrow MHM(S)$  induit un isomorphisme entre  $\mathrm{Ext}_{VSHM(S)}^1(\mathbb{Q}(0), \mathcal{H})$  et  $\mathrm{Ext}_{MHM(S)}^1(\mathbb{Q}(0), \mathcal{H})$ . C'est une conséquence de la remarque suivant le Théorème 3.27 de [S]. De façon analogue, le foncteur  $\iota_A: VSHM(A) \rightarrow MHM(A)$  induit un isomorphisme entre  $\mathrm{Ext}_{VSHM(A)}^1(\mathbb{Q}(0), \pi^*\mathcal{H})$  et  $\mathrm{Ext}_{MHM(A)}^1(\mathbb{Q}(0), \pi^*\mathcal{H})$ . La suite exacte précédente se réécrit donc comme suit :

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_{VSHM(S)}^1(\mathbb{Q}(0), \mathcal{H}) & \xrightleftharpoons[\pi_*]{e^*} & \mathrm{Ext}_{VSHM(A)}^1(\mathbb{Q}(0), \pi^*\mathcal{H}) \\ & & \downarrow \partial \\ & & \mathrm{End}_{VSHM(S)}(\mathcal{H}) \longrightarrow 0. \end{array}$$

**Proposition 3.11** – *L'extension  $\mathcal{L}og_s^{(1)}$  vérifie  $e^*\mathcal{L}og_s^{(1)} = 0$  et  $\partial\mathcal{L}og_s^{(1)} = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ .*

*Démonstration* –

- a) On considère la suite exacte  $(\Sigma)$  comme suite exacte de  $\pi(\overline{S}, s)$ -modules. On remarque que le morphisme  $1_s^{(1)}$  est  $\pi(\overline{S}, s)$ -équivariant. Ainsi,  $1_s^{(1)}$  fournit un scindage de la suite exacte  $\overline{e}^*(\Sigma)$  au niveau des  $\mathbb{Q}$ -systèmes locaux. Pour démontrer que  $e^* \mathcal{L}og_s^{(1)} = 0$  est nul, il suffit donc de voir que  $1_s^{(1)}$  respecte les filtrations ce qui peut se vérifier fibre à fibre. Si  $s' \in S(\mathbb{C})$ , le choix d'un chemin de  $s'$  à  $s$  fournit une identification de  $\mathcal{L}og_s^{(1)}$  et  $\mathcal{L}og_{s'}^{(1)}$ . Aussi suffit-il de montrer que  $1_s^{(1)}$  respecte les filtrations de la fibre en  $s$ . En utilisant la fonctorialité des constructions précédentes, cette assertion est conséquence du fait que le morphisme

$$1: \mathbb{Q}(0) \rightarrow \mathbb{Q}[\pi(\overline{A}_s, e(s))]^\wedge$$

est un morphisme dans la catégorie  $SHM$  (cf. partie 3.1.1).

- b) Pour démontrer que  $\partial \mathcal{L}og_s^{(1)} = \text{Id}_{\mathcal{H}}$ , il suffit de prouver cette identité fibre à fibre. Comme en a), on réduit ainsi l'étude au cas où  $A$  est une variété abélienne. Dans ce cas  $\mathcal{L}og^{(1)}$  correspond à la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \rightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]/\mathfrak{a}^2 \rightarrow \mathbb{Q}(0) \rightarrow 0,$$

où  $\mathfrak{a}$  est le noyau de l'augmentation  $\varepsilon: \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)] \rightarrow \mathbb{Q}$ . Le morphisme  $\partial \mathcal{L}og^{(1)}$  se déduit par dualité d'un morphisme de bord  $\delta$  apparaissant dans la suite exacte longue de cohomologie associée au triangle distingué  $\pi_* \pi^* \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \rightarrow \pi_* \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]/\mathfrak{a}^2 \rightarrow \pi_* \mathbb{Q}(0) \rightarrow \pi_* \pi^* \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2[1]$  :

$$0 \rightarrow H^0 \pi_* \pi^* \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \rightarrow H^0 \pi_* \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]/\mathfrak{a}^2 \rightarrow H^0 \pi_* \pi^* \mathbb{Q}(0) \xrightarrow{\delta} H^1 \pi_* \pi^* \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \rightarrow \dots$$

On souhaite donc démontrer que  $For(\delta)$  coïncide avec  $\text{Id}_{\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2}$  via l'identification

$$\text{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-vect}}(\mathbb{Q}, H^1 \pi_* \pi^* \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) = \text{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-vect}}(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2, \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2).$$

La compatibilité, via le foncteur  $For$ , entre les formalismes des six foncteurs au niveau des modules de Hodges d'une part, et au niveau topologique d'autre part, implique que  $For(\delta)$  apparaît dans la suite exacte longue de cohomologie associée au triangle distingué  $R\pi_* \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \rightarrow R\pi_* \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]/\mathfrak{a}^2 \rightarrow R\pi_*(\mathbb{Q}) \rightarrow R\pi_*(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2)[1]$  :

$$0 \rightarrow H^0 R\pi_* \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \rightarrow H^0 R\pi_* \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]/\mathfrak{a}^2 \rightarrow H^0 R\pi_* \mathbb{Q} \xrightarrow{For(\delta)} H^1 R\pi_* \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \rightarrow \dots$$

Comme  $\overline{A}$  est un tore, c'est un  $K(\Gamma, 1)$ . On peut donc utiliser la cohomologie du groupe  $\pi_1(\overline{A}, e)$  pour calculer  $For(\delta)$ . Ce dernier est présent dans la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte de représentations de  $\pi_1(\overline{A}, e)$   $0 \rightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \rightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]/\mathfrak{a}^2 \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow 0$  :

$$0 \rightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \rightarrow (\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]/\mathfrak{a}^2)^{\pi_1(\overline{A}, e)} \rightarrow \mathbb{Q} \xrightarrow{For(\delta)} H^1(\pi_1(\overline{A}, e), \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) \rightarrow \dots$$

Pour calculer  $For(\delta)$ , on introduit le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]/\mathfrak{a}^2 & \xrightarrow{\overline{\varepsilon}^{(1)}} & \mathbb{Q} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d^0 & & \downarrow d^0 & & \downarrow d'^0 \\ & & L_1(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) & \xrightarrow{\iota_*} & L_1(\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]/\mathfrak{a}^2) & \xrightarrow{(\overline{\varepsilon}^{(1)})_*} & L_1(\mathbb{Q}) \\ & & \downarrow d^1 & & \downarrow d^1 & & \downarrow d'^1 \\ & & L_2(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) & \xrightarrow{\iota_*} & L_2(\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]/\mathfrak{a}^2) & \xrightarrow{(\overline{\varepsilon}^{(1)})_*} & L_2(\mathbb{Q}) \end{array}$$

dans lequel  $L_i(V)$  ( $i \in \mathbb{N}$ ,  $V$   $\mathbb{Q}$ -vectoriel) désigne l'ensemble des applications du produit  $\pi_1(\overline{A}, e)^i$  dans  $V$  (muni de la structure de  $\mathbb{Q}$ -vectoriel évidente) et où les morphismes verticaux sont les différentielles usuelles. On se donne de plus un isomorphisme de groupes abéliens  $\pi_1(\overline{A}, e) \simeq \mathbb{Z}^{2d}$  et on identifie  $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]$  à  $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_{2d}, X_1^{-1}, \dots, X_{2d}^{-1}]$ . On vérifie alors que le morphisme suivant est un isomorphisme de groupes abéliens.

$$\gamma: \pi_1(\overline{A}, e) \rightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2, \quad (n_1, \dots, n_{2d}) \mapsto n_1 \overline{(X_1 - 1)} + \dots + n_{2d} \overline{(X_{2d} - 1)}$$

On a :

$$\begin{aligned} H^1(\pi_1(\overline{A}, e), \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) &= \text{Ker}(d^1)/\text{Im}(d^0) \\ &= \text{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-Mod}}(\pi_1(\overline{A}, e), \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) \quad (\pi_1(\overline{A}, e) \text{ agit trivialement sur } \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) \\ &\underset{(*)}{\simeq} \text{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-Mod}}(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2, \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) \quad (\text{via l'isomorphisme } \gamma) \end{aligned}$$

et pour tout  $x \in \mathbb{Q}$ ,  $For(\delta)(x) \in H^1(\pi_1(\overline{A}, e), \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2)$  est donné par la classe dans  $H^1(\pi_1(\overline{A}, e), \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2)$  de l'élément (bien défini)  $\iota_*^{-1} d^0 (\overline{\epsilon^{(1)}})^{-1} (x) \in \text{Ker}(d^1)$ .

En raison de la  $\mathbb{Q}$ -linéarité, il suffit de montrer que  $For(\delta)(1)$  coïncide avec  $Id_{\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2}$  via l'identification (\*). Or un calcul élémentaire montre que  $\iota_*^{-1} d^0 (\overline{\epsilon^{(1)}})^{-1} (1)$  est l'isomorphisme  $\gamma$ .

□

On note que les deux propriétés précédentes caractérisent l'extension/la  $\mathbb{Q}$ -variation  $\mathcal{Log}_s^{(1)}$ . D'autre part,  $\mathcal{Log}_s^{(1)}$  est équipé d'un morphisme canonique  $\varepsilon_s^{(1)}: \mathcal{Log}_s^{(1)} \rightarrow \mathbb{Q}(0)$  dans la catégorie  $VSHM(A)$  et d'un morphisme  $1_s^{(1)}: \mathbb{Q}(0) \rightarrow e^* \mathcal{Log}_s^{(1)}$  dans  $VSHM(S)$ . Comme on l'a remarqué précédemment, le couple  $(\mathcal{Log}_s^{(1)}, \varepsilon_s^{(1)})$  est rigide et par suite ne dépend pas du choix de  $s$ . On s'autorisera donc à noter simplement  $(\mathcal{Log}^{(1)}, \varepsilon^{(1)})$  le couple  $(\mathcal{Log}_s^{(1)}, \varepsilon_s^{(1)})$ .

**Notations 3.12** –

$\mathcal{Log}^{(n)} := \text{Sym}^n \mathcal{Log}^{(1)}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  
 $c_n(\chi)$  l'application de  $\text{Sym}^n V$  vers  $\text{Sym}^{n-1} V$ , qui associe à  $[v_1 \otimes \dots \otimes v_n]$  l'élément

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi(v_{\sigma(1)}) [v_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(n)}],$$

pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , où  $V$  est une  $\mathbb{Q}$ -représentation de dimension finie de  $\pi_1(A, a)$  et  $\chi: V \rightarrow \mathbb{Q}$  une forme linéaire  $\pi_1(A, a)$ -invariante.

On considère le pro-objet de  $VSHM(A)$   $\varinjlim_{n \geq 0} \mathcal{Log}^{(n)}$  dont les morphismes de transition sont donnés au niveau des  $\mathbb{Q}$ -systèmes locaux par les  $c_n(\overline{\varepsilon^{(1)}})$ ,  $n \geq 0$ .

**Remarque 3.13** – Dans [Ki], Kings définit le logarithme du schéma abélien  $A/S$  comme étant  $\varinjlim_{n \geq 0} \mathcal{Log}^{(n)}$ .

On démontre maintenant que  $\varinjlim_{n \geq 0} \mathcal{Log}^{(n)}$  est isomorphe à  $\mathcal{Log}$  défini dans la partie 3.1.2. Pour tout  $n \geq 1$ , soit  $1_s^{(n)}: \mathbb{Q}(0) \rightarrow e^* \mathcal{Log}_s^{(n)}$  le morphisme induit par :

$$\bigotimes^n 1_s^{(1)} : \bigotimes^n \mathbb{Q}(0) \rightarrow \bigotimes^n e^* \mathcal{L}og_s^{(1)}.$$

On applique alors le Théorème 3.9 pour associer à  $1_s^{(n)}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , le morphisme  $\varphi_s^{(n)}$

$$\varphi_s^{(n)} : \mathcal{L}og \rightarrow \mathcal{L}og_s^{(n)}.$$

Puisque pour tout  $n \geq 1$ ,  $c_n(\overline{\varepsilon(1)}) \circ \overline{1_s^{(n)}} = \overline{1_s^{(n-1)}}$ ,  $(\varphi_s^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  définit un morphisme dans  $\text{pro-}VSHM(A)$

$$\varphi_s : \mathcal{L}og \rightarrow \lim_{\substack{\leftarrow \\ n \geq 0}} \mathcal{L}og^{(n)}.$$

**Proposition 3.14** – *Le morphisme  $\varphi_s$  est un isomorphisme.*

*Démonstration* – Il suffit de prouver que  $\varphi_s$  induit un morphisme sur chacune des fibres. Par fonctorialité de la construction de  $\varphi_s$ , on réduit l'assertion au cas où  $A$  est une variété abélienne. Dans ce cas, on supprime l'indice  $s$  dans les notations. Il est suffisant de prouver que  $\overline{\varphi} : \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]^\wedge \rightarrow \varprojlim_{n \geq 0} \text{Sym}^n(\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]/\mathfrak{a}^2)$  est un isomorphisme de  $\mathbb{Q}$ -vectoriels, où  $\mathfrak{a}$  désigne le noyau de l'augmentation de  $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]$ . On fixe un isomorphisme  $\pi_1(\overline{A}, e) \simeq \mathbb{Z}^{2d}$ . Celui-ci détermine un isomorphisme  $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)] \simeq \mathbb{Q}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_{2d}, X_{2d}^{-1}]$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque  $\mathcal{L}og_A^{(n)}$  est  $(n+1)$ -unipotente (sa filtration par le poids a  $(n+1)$ -gradués non triviaux qui sont des variations constantes), le morphisme  $\varphi^{(n)}$  se factorise donc à travers la projection  $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]^\wedge \rightarrow \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]/\mathfrak{a}^{n+1}$ . L'action de  $\pi_1(\overline{A}, e)$  sur  $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]/\mathfrak{a}^2$  étant donnée par la multiplication, on en déduit que  $\overline{\varphi}^{(n)}$  est donné par la composition :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]^\wedge & \rightarrow & \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]/\mathfrak{a}^{n+1} \xrightarrow{\psi^{(n)}} \text{Sym}^n(\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]/\mathfrak{a}^2) \\ & & X_1^{i_1} \dots X_{2d}^{i_{2d}} \mapsto [[X_1^{i_1} \dots X_{2d}^{i_{2d}}] \otimes \dots \otimes [X_1^{i_1} \dots X_{2d}^{i_{2d}}]] \end{array}$$

On remarque que  $\psi^{(0)} = \text{Id}_{\mathbb{Q}}$ . On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{a}^{n+1}/\mathfrak{a}^{n+2} & \longrightarrow & \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]/\mathfrak{a}^{n+2} & \longrightarrow & \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]/\mathfrak{a}^{n+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \psi^{(n+1)} & & \downarrow \psi^{(n+1)} & & \downarrow \psi^{(n)} \\ 0 & \longrightarrow & \text{Sym}^{n+1}(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) & \xrightarrow{i_{n+1}} & \text{Sym}^{n+1}(\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]/\mathfrak{a}^2) & \xrightarrow{c_{n+1}(\overline{\varepsilon(1)})} & \text{Sym}^n(\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]/\mathfrak{a}^2) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où le morphisme  $i_{n+1}$  est induit par l'inclusion  $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \subset \mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]/\mathfrak{a}^2$ . On prouve maintenant que  $\psi^{(n+1)}$  est un isomorphisme. La famille

$$([(X_1 - 1)^{i_1} \dots (X_{2d} - 1)^{i_{2d}}])_{\{(i_1, \dots, i_{2d}) \in \mathbb{N}^{2d} / i_1 + \dots + i_{2d} = n+1\}}$$

est une base de  $\mathfrak{a}^{n+1}/\mathfrak{a}^{n+2}$ . Pour tout  $(i_1, \dots, i_{2d}) \in \mathbb{N}^{2d} / i_1 + \dots + i_{2d} = n+1$ , on a

$$\psi^{(n+1)}([(X_1 - 1)^{i_1} \dots (X_{2d} - 1)^{i_{2d}}]) = [\bigotimes^{i_1} [X_1 - 1] \otimes \dots \otimes \bigotimes^{i_{2d}} [X_{2d} - 1]].$$

Or  $\{[X_1 - 1], \dots, [X_{2d} - 1]\}$  est une famille libre de  $\mathbb{Q}[\pi_1(\overline{A}, e)]/\mathfrak{a}^2$ . Donc  $\psi^{(n+1)}$  est injective. On conclut à la bijectivité à l'aide des dimensions. À l'aide d'une récurrence, on déduit donc que les  $\psi^n$  sont des isomorphismes. □

### 3.3 Le pro-système local sous-jacent au logarithme

Dans cette partie on décrit le pro-système local de  $\mathbb{R}$ -vectoriels  $\overline{\mathcal{L}og}_{\mathbb{R}}$  à l'aide d'un pro-fibré vectoriel à connexion intégrable sur  $A^{\infty}$  en utilisant la construction de Levin (cf. [L, Part 2]).

#### 3.3.1 Le fibré tangent d'une famille de tores réels

Soit  $B$  une variété différentielle.

**Définition 3.15** — Une famille de groupes de Lie réels au-dessus de  $B$  est la donnée d'une fibration en tores réels  $p : X \rightarrow B$  et de trois morphismes de variétés différentielles  $0 : B \rightarrow X$  (unité) section de  $p$ ,  $m : X \times_B X \rightarrow X$  (multiplication) compatible avec les projections sur  $B$ ,  $i : G \rightarrow G$  (inverse) tel que  $p \circ i = p$ , de sorte que le quadruplet  $(p, 0, m, i)$  définit un objet en groupes dans la catégorie des variétés différentielles au-dessus de  $B$ . On note que  $p$  étant une fibration, le produit fibré  $X \times_B X$  dans la catégorie des variétés différentielles est bien défini. Si les fibres de  $p$  sont des tores réels, on dit que  $(p, 0, m, i)$  est une famille de tores réels au-dessus de  $B$ .

On a une notion évidente de morphisme entre familles de groupes de Lie réels au-dessus de  $B$ . On note  $Lie/B$  la catégorie des familles de groupes de Lie réels au-dessus de  $B$ .

Soit  $\Gamma$  un système local de groupes abéliens libres de rang fini au-dessus de  $B$ . Il existe une construction classique qui permet d'associer au faisceau de  $\mathcal{O}_B$ -modules localement libres  $\Gamma \otimes \mathcal{O}_B$  un fibré vectoriel au-dessus de  $B$  que l'on note  $E(\Gamma)$  dont la fibre au-dessus de  $b \in B$  est  $(\Gamma_b)_{\mathbb{R}}$  et tel que le faisceau des sections de  $E(\Gamma)$  est  $\Gamma \otimes \mathcal{O}_B$ .

**Fait 3.16** — On peut, de manière analogue, construire à partir de  $\Gamma$  une famille de tores réels au-dessus de  $B$ , notée  $p : E(\Gamma)/\Gamma \rightarrow B$ , dont la fibre au-dessus de  $b \in B$  est  $(\Gamma_b)_{\mathbb{R}}/\Gamma_b$ . Par construction  $E(\Gamma)/\Gamma$  se trouve être muni d'un morphisme canonique

$$q : E(\Gamma) \rightarrow E(\Gamma)/\Gamma$$

dans  $Lie/B$  qui est universel, i.e. pour tout morphisme  $r : E(\Gamma) \rightarrow X$  dans  $Lie/B$  tel que  $\Gamma$  est un sous-faisceau du faisceau des sections du noyau de  $r$ , il existe un unique morphisme  $\bar{r} : E(\Gamma)/\Gamma \rightarrow X$  dans  $Lie/B$  tel que  $\bar{r} \circ p = r$ . De plus, on a une décomposition canonique du fibré tangent de  $E(\Gamma)/\Gamma$  :

$$TE(\Gamma)/\Gamma = p^*E(\Gamma) \oplus p^*TB.$$

En fait, toute famille de tores réels au-dessus de  $B$  est isomorphe à une famille de tores réels au-dessus de  $B$  ainsi construite. Soit  $(p : X \rightarrow B, 0, m, i)$  une famille de tores réels au-dessus de  $B$ . L'exponentielle fibre à fibre définit une application différentielle  $\exp : 0^*TX/B \rightarrow X$  où  $TX/B$  est le noyau de  $Tp : TX \rightarrow TB$ . Le faisceau des sections du noyau de  $\exp$  s'identifie à  $\Gamma := (R^1p_*\mathbb{Z})^{\vee}$ . Le faisceau des sections de  $0^*TX/B$  est donc canoniquement isomorphe à  $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_B$ . Ainsi, en factorisant par  $q : E(\Gamma) \rightarrow E(\Gamma)/\Gamma$ , on en déduit un morphisme  $\overline{\exp} : TE(\Gamma)/\Gamma \rightarrow X$  dans  $Lie/B$  qui est un isomorphisme. En effet, c'est un isomorphisme sur les fibres au-dessus de  $B$ . On obtient donc une décomposition canonique du fibré tangent de  $X$

$$TX = p^*E(\Gamma) \oplus p^*TB.$$



### 3.3.2 Description de $\overline{\mathcal{L}og}_{\mathbb{R}}$

La variété différentielle  $\pi^\infty : A^\infty$  au-dessus de  $S^\infty$  est munie d'une structure de famille de tores réels au-dessus de  $S^\infty$  héritée des lois de structure du schéma abélien  $A/S$ . On note  $\Gamma$  le système local  $(R^1\pi^*\mathbb{Z})^\vee$  sur  $S^\infty$  et simplement  $E$  le fibré vectoriel réel  $E(\Gamma)$  sur  $S^\infty$ . On remarque qu'avec les notations introduites, on a  $\overline{\mathcal{H}} = \Gamma_{\mathbb{Q}}$ .

Le morphisme  $\partial : \text{Ext}_{V_{SHM(A)}}^1(\mathbb{Q}(0), \pi^*\mathcal{H}) \rightarrow \text{End}_{V_{SHM(S)}}(\mathcal{H})$  de la Proposition 3.11 a été construit en considérant la théorie des modules de Hodge mixtes. On peut, de façon analogue, construire un morphisme

$$For(\partial)_{\mathbb{R}} : \text{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(A)}^1(\mathbb{R}, \overline{\pi}^*\Gamma_{\mathbb{R}}) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(S)}(\Gamma_{\mathbb{R}})$$

en se plaçant, cette fois, au niveau topologique. On déduit de la Proposition 3.11 que le système local de  $\mathbb{R}$ -vectoriels  $(\overline{\mathcal{L}og}^{(1)})_{\mathbb{R}}$  est caractérisé par

$$\overline{e}^*(\overline{\mathcal{L}og}^{(1)})_{\mathbb{R}} = 0 \text{ et } For(\partial)_{\mathbb{R}}((\overline{\mathcal{L}og}^{(1)})_{\mathbb{R}}) = \text{Id}_{\Gamma_{\mathbb{R}}}.$$

On a vu dans la partie précédente que l'exponentielle fibre à fibre induisait une décomposition du fibré tangent de  $A^\infty : TA^\infty = (\pi^\infty)^*E \oplus (\pi^\infty)^*TB$ . On note  $\nu$  la 1-forme différentielle sur  $A^\infty$  à valeurs dans  $(\pi^\infty)^*E$  correspondant à la projection canonique de  $TA^\infty$  sur  $(\pi^\infty)^*E$ .

**Lemme 3.17** – Soit  $\nabla_{GM}$  la connexion de Gauss-Manin sur  $E$ . La forme  $\nu$  est fermée, i.e.  $\nabla_{GM}(\nu) = 0$ , et sa classe  $[\nu]$  dans  $H^1(\overline{A}, \overline{\pi}^*\Gamma_{\mathbb{R}})$  vérifie  $For(\partial)_{\mathbb{R}}([\nu]) = \text{Id}_{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ .

*Démonstration* –

- a) Pour la preuve de la première assertion, on renvoie le lecteur à [L, p. 216].
- b) Pour la seconde, il suffit de vérifier l'identité sur les fibres. Les constructions étant fonctorielles, on s'est ainsi ramené à prouver la relation dans le cas où  $A$  est une variété abélienne. Dans ce cas, le morphisme  $For(\partial)_{\mathbb{R}}$  est donné par la composition :

$$\begin{aligned} H^1(\overline{A}, H_1(\overline{A}, \mathbb{R})) &= H^1(\overline{A}, \mathbb{R}) \otimes H_1(\overline{A}, \mathbb{R}) \rightarrow \text{End}(H_1(\overline{A}, \mathbb{R})). \\ \omega \otimes c &\mapsto (c' \mapsto \langle \omega, c' \rangle c) \end{aligned}$$

On fixe un isomorphisme  $A^\infty \simeq \mathbb{R}^{2d}/\mathbb{Z}^{2d}$ . On obtient alors des coordonnées et on exprime  $\nu$  relativement à celles-ci. On calcule  $For(\partial)_{\mathbb{R}}([\nu])$  à l'aide de la composition donnée ci-dessus pour établir  $For(\partial)_{\mathbb{R}}([\nu]) = \text{Id}_{H_1(\overline{A}, \mathbb{R})}$ . □

On peut maintenant expliciter un fibré à connexion candidat pour représenter le système local  $(\overline{\mathcal{L}og}^{(1)})_{\mathbb{R}}$ . On considère le fibré vectoriel  $E' := \mathcal{O}_{A^\infty} \oplus (\pi^\infty)^*E$  muni de la connexion  $\nabla^1$  :

$$\begin{aligned} \nabla^1 : \quad \mathcal{O}_{A^\infty} \oplus (\pi^\infty)^*E &\longrightarrow \Omega_{A^\infty}^1 \oplus \Omega_{A^\infty}^1 \otimes (\pi^\infty)^*E. \\ (f, g \otimes h) &\mapsto (df, dg \otimes h + f\nu) \end{aligned}$$

La connexion  $\nabla^1$  est plate ( $\nu$  est fermée). Le faisceau  $\mathbb{E} := \text{Ker}(\nabla^1)$  est donc un système local. On a une suite exacte de fibrés vectoriels munis de connexions :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & ((\pi^\infty)^*E, \nabla_{GM}) & \rightarrow & (\mathcal{O}_{A^\infty} \oplus (\pi^\infty)^*E, \nabla^1) & \rightarrow & (\mathcal{O}_{A^\infty}, d) \rightarrow 0, \\ & & g \otimes h & \mapsto & (0, g \otimes h) & & \\ & & & & (f, g \otimes h) & \mapsto & f \end{array}$$

où  $\nabla_{GM}$  désigne la connexion de Gauss-Manin. Celle-ci correspond à une suite exacte de systèmes locaux  $0 \rightarrow \overline{\pi}^*\overline{\mathcal{H}} \rightarrow \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 0$  dont la classe dans  $\text{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(A)}^1(\mathbb{R}, \overline{\pi}^*\Gamma_{\mathbb{R}})$  est notée  $[\mathbb{E}]$ .

**Proposition 3.18** *On a les identités suivantes :*

$$\bar{e}^*([\mathbb{E}]) = 0 \quad \text{et} \quad \text{For}(\partial)_{\mathbb{R}}([\mathbb{E}]) = \text{Id}_{\Gamma_{\mathbb{R}}},$$

i.e.  $\mathbb{E} = \overline{(\mathcal{L}og^{(1)})}_{\mathbb{R}}$ .

*Démonstration* — La première identité est évidente. Pour démontrer la deuxième, on utilise la résolution de  $\mathbb{E}$  construite à partir de  $(E', \nabla^1)$  pour expliciter  $[\mathbb{E}] \in H^1(\overline{A}, \overline{\pi}^* \Gamma_{\mathbb{R}})$  :

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{\pi}^* \overline{\mathcal{H}} & \longrightarrow & \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow i & & \\ (\pi^\infty)^* E & \longrightarrow & \mathcal{O}_{A^\infty} \oplus (\pi^\infty)^* E & \xrightarrow{p} & \mathcal{O}_{A^\infty} & \longrightarrow & 0. \\ \downarrow & & \downarrow \nabla^1 & & \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow \Omega_{A^\infty}^1 \otimes (\pi^\infty)^* E & \xrightarrow{j} & \Omega_{A^\infty}^1 \oplus (\Omega_{A^\infty}^1 \otimes (\pi^\infty)^* E) & \longrightarrow & \Omega_{A^\infty}^1 & & \\ \downarrow d^1 & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \Omega_{A^\infty}^2 \otimes (\pi^\infty)^* E & \longrightarrow & \Omega_{A^\infty}^2 \oplus (\Omega_{A^\infty}^2 \otimes (\pi^\infty)^* E) & \longrightarrow & \Omega_{A^\infty}^2 & & \end{array}$$

Alors  $j^{-1} \nabla^1 p^{-1} i (1)$  est dans  $\text{Ker}(d^1)$  et sa classe dans  $H^1(\overline{A}, \overline{\pi}^* \Gamma_{\mathbb{R}})$  coïncide avec  $[\mathbb{E}] \in H^1(\overline{A}, \overline{\pi}^* \Gamma_{\mathbb{R}})$ . Or  $j^{-1} \nabla^1 p^{-1} i (1) = \nu$ . On conclut à l'aide du Lemme 3.17.

□

Après avoir obtenu cette description de  $\overline{(\mathcal{L}og^{(1)})}_{\mathbb{R}}$ , on étudie  $\overline{\mathcal{L}og}_{\mathbb{R}}$ . Tout d'abord,  $\nabla^1$  sur  $E'$  induit une connexion  $\nabla^n$  sur  $\text{Sym}^n E'$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $\nu_n : \text{Sym}^n(\pi^\infty)^* E \rightarrow (\text{Sym}^{n+1}(\pi^\infty)^* E) \otimes \Omega_{A^\infty}^1$ ,  $n \geq 0$ , définie comme étant la composée :

$$\text{Sym}^n(\pi^\infty)^* E \xrightarrow{\text{Id} \otimes \nu} (\text{Sym}^n(\pi^\infty)^* E) \otimes (\pi^\infty)^* E \otimes \Omega_{A^\infty}^1 \xrightarrow{\text{mult} \otimes \text{Id}} (\text{Sym}^{n+1}(\pi^\infty)^* E) \otimes \Omega_{A^\infty}^1.$$

On introduit alors le pro-fibré à connexion

$$(\mathcal{G}, \nabla) := \left( \prod_{n \geq 0} \text{Sym}^n(\pi^\infty)^* E, \prod_{n \geq 0} (\nabla_{GM}^n + \nu_n) \right),$$

où  $\nabla_{GM}^n$  est la connexion de Gauss-Manin sur  $\text{Sym}^n(\pi^\infty)^* E$ .

Soit  $l \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ . On remarque que le sous-fibré vectoriel  $W_l := \prod_{k \geq l+1} \text{Sym}^k(\pi^\infty)^* E$  est stable par

$\nabla$  et on définit :

$$\begin{array}{ll} (\mathcal{G}_l, \nabla_l) & \text{le fibré à connexion plate quotient } (\mathcal{G}, \nabla)/W_l, \\ p_l & \text{la projection canonique } (\mathcal{G}, \nabla) \rightarrow (\mathcal{G}_l, \nabla_l), \\ p_{l+1, l} & \text{la projection canonique } (\mathcal{G}_{l+1}, \nabla_{l+1}) \rightarrow (\mathcal{G}_l, \nabla_l). \end{array}$$

On remarque que les morphismes  $p_l$  induisent un morphisme de pro-fibrés vectoriels à connexions plates

$$p : (\mathcal{G}, \nabla) \rightarrow \varprojlim_{l \geq 1} (\mathcal{G}_l, \nabla_l)$$

qui est un isomorphisme (les morphismes de transition de l'objet de droite sont les morphismes  $p_{l+1, l}$ ).

**Proposition 3.19** – *Il existe une famille d'isomorphismes de fibrés vectoriels à connexions plates  $(\theta_n: (\mathcal{G}_n, \nabla_n) \rightarrow (\mathrm{Sym}^n E', \nabla^n))_{n \in \mathbb{N}}$  qui induit un isomorphisme de pro-fibrés vectoriels à connexions :*

$$\theta: (\mathcal{G}, \nabla) = \varprojlim_{n \geq 1} (\mathcal{G}_n, \nabla_n) \rightarrow \varprojlim_{n \geq 1} (\mathrm{Sym}^n E', \nabla^n).$$

Et donc, le noyau de  $\nabla$  s'identifie à  $\overline{\mathcal{L}og}_{\mathbb{R}}$ .

*Démonstration* – On commence par remarquer que la dernière assertion se déduit de l'existence d'un tel isomorphisme  $\theta$  et de la Proposition 3.18.

D'une part,  $\mathcal{G}_n = \bigoplus_{0 \leq k \leq n} \mathrm{Sym}^k(\pi^\infty)^* E$  et d'autre part, on a un isomorphisme naturel de fibrés vectoriels :

$$\begin{aligned} \psi_n : \bigoplus_{0 \leq k \leq n} \mathrm{Sym}^k(\pi^\infty)^* E &\rightarrow \mathrm{Sym}^k(\mathcal{O}_{A^\infty} \oplus (\pi^\infty)^* E). \\ [h_1 \otimes \dots \otimes h_k] &\mapsto [1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes h_1 \otimes \dots \otimes h_k] \end{aligned}$$

Pour  $n \geq 2$ ,  $\psi_n$  n'est ni compatible avec les morphismes de transition, ni compatible avec les connexions. On corrige ce défaut à l'aide d'un automorphisme  $\alpha_n$  de  $\bigoplus_{0 \leq k \leq n} \mathrm{Sym}^k(\pi^* \mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{A^\infty})$  défini facteur par facteur par une homothétie de rapport

$$\alpha_n^k := \frac{n!}{(n-k)!}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

non nul. Si on pose maintenant pour tout  $n \geq 0$ ,  $\theta_n := \psi^n \circ \alpha_n$ , on vérifie que la famille  $(\theta_n)_{n \geq 0}$  est bien une famille d'isomorphismes de fibrés vectoriels à connexions compatibles avec les morphismes de transitions. Ainsi, elle induit un isomorphisme

$$\theta: (\mathcal{G}, \nabla) = \varprojlim_{n \geq 1} (\mathcal{G}_n, \nabla_n) \rightarrow \varprojlim_{n \geq 1} (\mathrm{Sym}^n E', \nabla^n).$$

□

### 3.4 Propriétés du logarithme d'un schéma abélien

On rappelle que  $\mathcal{H}$  désigne  $(R^1 \pi_* \mathbb{Q})^\vee \in \mathrm{Ob}(VSHM(A))$ .

#### 3.4.1 Gradués par le poids

Puisque l'on dispose d'une suite exacte canonique

$$0 \rightarrow \pi^* \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}og^{(1)} \xrightarrow{\varepsilon^{(1)}} \mathbb{Q}(0) \rightarrow 0,$$

on a une identification naturelle entre le gradué par le poids de  $\mathcal{L}og^{(1)}$  est  $\mathbb{Q}(0) \oplus \pi^* \mathcal{H}$ . De cette propriété et de l'isomorphisme  $\mathcal{L}og = \varprojlim_{n \geq 1} \mathrm{Sym}^n \mathcal{L}og^{(1)}$ , où les morphismes de transition dans le

membre de droite sont induits par  $\varepsilon^{(1)}$ , on déduit que

$$Gr^W \mathcal{L}og = \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{Sym}^n \pi^* \mathcal{H}.$$

#### 3.4.2 Principe de scindage pour la section unité

On a vu que  $e^* \mathcal{L}og^{(1)} = \mathbb{Q}(0) \oplus \mathcal{H}$  (cf. Proposition 3.11). À nouveau en utilisant l'isomorphisme canonique  $\mathcal{L}og = \varprojlim_{n \geq 1} \mathrm{Sym}^n \mathcal{L}og^{(1)}$ , on montre que

$$e^* \mathcal{L}og = \prod_{n \geq 0} \mathrm{Sym}^n \mathcal{H}.$$

### 3.4.3 Principe de scindage pour une section de torsion

Soit  $x : S \rightarrow A$  une section de  $N$ -torsion. Soit  $[N] : A \rightarrow A$  l'isogénie donnée par la multiplication par  $N$ . On applique  $[N]^*$  à la suite exacte

$$0 \rightarrow \pi^* \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}og^1 \rightarrow \mathbb{Q}(0) \rightarrow 0$$

pour obtenir une suite exacte

$$0 \rightarrow \pi^* \mathcal{H} = [N]^* \pi^* \mathcal{H} \rightarrow [N]^* \mathcal{L}og^1 \rightarrow \mathbb{Q}(0) \rightarrow 0$$

dont on note  $[[N]^* \mathcal{L}og^1]$  la classe dans  $\text{Ext}_{V_{SHM(A)}}^1(\mathbb{Q}(0), \pi^* \mathcal{H})$ . De  $e^*[\mathcal{L}og^1] = 0$  et  $\partial[\mathcal{L}og^1] = \text{Id}_{\mathcal{H}}$ , on déduit  $e^*[[N]^* \mathcal{L}og^1] = 0$  et  $\partial[[N]^* \mathcal{L}og^1] = \text{Id}_{\mathcal{H}}$ . Par conséquent,  $[[N]^* \mathcal{L}og^1] = [\mathcal{L}og^1]$  (cf. Proposition 3.11) et donc  $[N]^* \mathcal{L}og^1 = \mathcal{L}og^1$ . Ainsi

$$[N]^* \mathcal{L}og = \mathcal{L}og (= \varprojlim_{n \geq 1} \text{Sym}^n \mathcal{L}og^{(1)}).$$

**Proposition 3.20** [W, III-Prop 6.1] –  $x^* \mathcal{L}og = \prod_{k \geq 0} \text{Sym}^k \mathcal{H}$ .

*Démonstration* –  $x^* \mathcal{L}og = x^*[N]^* \mathcal{L}og = e^* \mathcal{L}og = \prod_{k \geq 0} \text{Sym}^k \mathcal{H}$  (cf. partie 3.4.2). □

### 3.5 Images directes supérieures du logarithme

**Théorème 3.21** –

a) On a  $H^k \pi_* \mathcal{L}og(d) = 0$  si  $k \neq 2d$ . Le morphisme  $\mathcal{L}og(d) \rightarrow \mathbb{Q}(d)$  induit par  $\varepsilon : \mathcal{L}og \rightarrow \mathbb{Q}(0)$  induit le morphisme

$$H^{2d} \pi_* \mathcal{L}og(d) \rightarrow H^{2d} \pi_* \mathbb{Q}(d) = \mathbb{Q}(0).$$

Ce dernier est un isomorphisme.

b) Des deux identités  $e^* \mathcal{L}og = \prod_{k \geq 0} \text{Sym}^k \mathcal{H}$  (cf. partie 3.4.2) et  $e^! \mathcal{L}og(d) = e^* \mathcal{L}og[-2d]$ , on déduit que  $H^k e^! \mathcal{L}og(d) = 0$ , si  $k \neq 2d$  et  $H^{2d} e^! \mathcal{L}og(d) = \prod_{k \geq 0} \text{Sym}^k \mathcal{H}$ . Cette propriété, a) et la suite exacte longue de cohomologie associée au triangle distingué :

$$e^! \mathcal{L}og(d) \rightarrow \pi_* \mathcal{L}og(d) \rightarrow (\pi_U)_* \mathcal{L}og(d)_U \rightarrow e^! \mathcal{L}og(d)[1]$$

donnent  $H^k(\pi_U)_* \mathcal{L}og_U(d) = 0$  si  $k \neq 2d - 1$  et une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow H^{2d-1}(\pi_U)_* \mathcal{L}og(d)_U \rightarrow H^{2d} e^! \mathcal{L}og(d) \rightarrow H^{2d} \pi_* \mathcal{L}og(d) \rightarrow 0.$$

On vérifie que celle-ci s'insère dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{2d-1}(\pi_U)_* \mathcal{L}og(d)_U & \xrightarrow{\rho'} & \prod_{k \geq 0} \text{Sym}^k \mathcal{H} & \xrightarrow{pr_{k=0}} & \mathbb{Q}(0) \longrightarrow 0. \\ & & \parallel & & \parallel & & \uparrow a) \\ 0 & \longrightarrow & H^{2d-1}(\pi_U)_* \mathcal{L}og(d)_U & \longrightarrow & H^{2d} e^! \mathcal{L}og(d) & \longrightarrow & H^{2d} \pi_* \mathcal{L}og(d) \longrightarrow 0 \end{array}$$

La factorisation canonique de  $\rho'$  à travers  $\prod_{k>0} \text{Sym}^k \mathcal{H} \hookrightarrow \prod_{k \geq 0} \text{Sym}^k \mathcal{H}$  donne le morphisme résidu

$$\rho : H^{2d-1}(\pi_U)_* \mathcal{L}og(d)_U \rightarrow \prod_{k>0} \text{Sym}^k \mathcal{H}$$

qui est un isomorphisme.

*Démonstration* — Pour a), on renvoie à [W, I-Cor 4.4], [W, III-Thm 1.3] ou [Ki, Prop 1.1.3]. □

## 4 Le polylogarithme d'un schéma abélien

### 4.1 Définition du polylogarithme d'un schéma abélien

Les propriétés du logarithme énoncées dans la partie 3.4 ont des analogues topologiques évidents, e.g.  $R^i(\pi_U)_* \overline{\mathcal{L}og}_U(d) = 0$  pour tout  $i \neq 2d-1$  et le morphisme résidu  $R^{2d-1}(\pi_U)_* \overline{\mathcal{L}og}_U(d) \rightarrow \bar{e}^* \overline{\mathcal{L}og}$  induit un isomorphisme  $\bar{\rho} : R^{2d-1}(\pi_U)_* \overline{\mathcal{L}og}_U(d) \xrightarrow{\sim} \prod_{n=1}^{\infty} \overline{\text{Sym}}^n \mathcal{H}$ .

On définit deux isomorphismes  $\kappa$  et  $\bar{\kappa}$  par le diagramme commutatif, noté  $\mathcal{D}_1$ , suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ext}_{MHM(U)}^{2d-1}(\pi_U^* \mathcal{H}, \mathcal{L}og_U(d)) & \xrightarrow{\text{For}} & \text{Ext}_{\mathcal{F}_Q(U)}^{2d-1}(\pi_U^* \bar{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og}_U(d)) \\
 \parallel & \text{(adjonction)} & \parallel \\
 \text{Ext}_{MHM(S)}^{2d-1}(\mathcal{H}, (\pi_U)_* \mathcal{L}og_U(d)) & \xrightarrow{\text{For}} & \text{Ext}_{\mathcal{F}_Q(S)}^{2d-1}(\bar{\mathcal{H}}, R\pi_{U*} \overline{\mathcal{L}og}_U(d)) \\
 \parallel & \text{Thm 3.21} & \parallel \\
 \text{Hom}_{MHM(S)}(\mathcal{H}, H^{2d-1}(\pi_U)_* \mathcal{L}og_U(d)) & \xrightarrow{\text{For}} & \text{Hom}_{\mathcal{F}_Q(S)}(\bar{\mathcal{H}}, R^{2d-1} \pi_{U*} \overline{\mathcal{L}og}_U(d)) \\
 \rho_* \downarrow \sim & \text{(prop. d) de } \mathcal{L}og & \downarrow \sim \bar{\rho}_* \\
 \text{Hom}_{MHM(S)}(\mathcal{H}, \prod_{n=1}^{\infty} \text{Sym}^n \mathcal{H}) & \xrightarrow{\text{For}} & \text{Hom}_{\mathcal{F}_Q(S)}(\bar{\mathcal{H}}, \prod_{n=1}^{\infty} \text{Sym}^n \bar{\mathcal{H}})
 \end{array}$$

$\kappa \sim$  (à gauche)  $\sim \bar{\kappa}$  (à droite)

La commutativité du centre de ce diagramme résulte de la compatibilité du formalisme des 6 foncteurs de  $D^b MHM(\cdot)$  et de celui de  $D_c^b(\cdot)$  via le foncteur For, e.g.  $\text{For} \circ f_* = R\bar{f}_* \circ \text{For}$  pour  $f$  un morphisme entre schémas de type fini, séparés sur  $\mathbb{C}$ . On remarque que le but de  $\kappa$  s'identifie naturellement à  $\text{Hom}_{VSHM(S)}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$  (cf. pleine fidélité de  $\iota_S$  et poids).

**Définition 4.1** — Le polylogarithme du schéma abélien  $A/S$ , noté  $\mathcal{P}ol$ , est défini par

$$\text{Ext}_{MHM(U)}^{2d-1}(\pi_U^* \mathcal{H}, \mathcal{L}og_U(d)) \ni \mathcal{P}ol := \kappa^{-1}(Id_{\mathcal{H}}).$$

## 4.2 Propriétés du polylogarithme d'un schéma abélien

### 4.2.1 Description complète dans le cas elliptique ( $d = 1$ )

Pour tout  $\mathbb{V}, \mathbb{W} \in \text{Ob}(VSHM(U))$ , le foncteur  $\iota_U$  induit un isomorphisme (cf. remarque suivant le Théorème 3.27 de [S])

$$\text{Ext}_{MHM(U)}^1(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{VSHM(U)}^1(\mathbb{V}, \mathbb{W}).$$

Le polylogarithme est une 1-extension dans  $VSHM(U)$  dont une description complète a été donnée par Beilinson et Levin dans [BL, 4.8]. On peut également consulter le théorème [W, V-Thm 3.4] et sa preuve.

### 4.2.2 Sur une description en dimensions supérieures ( $d \geq 2$ )

On démontre que le polylogarithme *n'est pas* dans l'image du morphisme

$$\text{Ext}_{VSHM(U)}^{2d-1}(\pi_U^* \mathcal{H}, \mathcal{L}og_U(d)) \rightarrow \text{Ext}_{MHM(U)}^{2d-1}(\pi_U^* \mathcal{H}, \mathcal{L}og_U(d))$$

induit par  $\iota_S$  (cf. [W, III-Thm 2.3 b])).

### 4.2.3 Rigidité du polylogarithme d'un schéma abélien

**Lemme 4.2** – *L'application  $\text{For}: \text{Ext}_{MHM_{\mathbb{Q}}(U)}^{2d-1}(\pi_U^* \mathcal{H}, \mathcal{L}og_U(d)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}(U)}^{2d-1}(\pi_U^* \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)})$  est injective et  $\text{For}(\mathcal{P}ol)$  est caractérisé par*

$$\overline{\kappa}(\text{For}(\mathcal{P}ol)) = \text{Id}_{\overline{\mathcal{H}}}.$$

*Démonstration* – C'est une conséquence de la commutativité du diagramme  $\mathcal{D}_1$  et de la définition de  $\mathcal{P}ol$ . □

On a mentionné au début de la partie 4.1 que les propriétés du logarithme (cf. partie 3.4) admettent des analogues topologiques. On a alors donné un exemple en considérant des coefficients rationnels. En fait, ces propriétés au niveau topologique peuvent également se démontrer en considérant des coefficients complexes et on a des résultats de compatibilités par extension des scalaires de  $\mathbb{Q}$  à  $\mathbb{C}$ . Par exemple,  $R^i(\pi_U)_* \overline{\mathcal{L}og_U}(d)_{\mathbb{C}} = 0$  pour tout  $i \neq 2d-1$  et le morphisme résidu  $R^{2d-1}(\pi_U)_* \overline{\mathcal{L}og_U}(d)_{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{e}^* \overline{\mathcal{L}og}_{\mathbb{C}}$  induit un isomorphisme  $\overline{\rho}_{\mathbb{C}}: R^{2d-1}(\pi_U)_* \overline{\mathcal{L}og_U}(d)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \prod_{n=1}^{\infty} \overline{\text{Sym}}^n \overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}$ .

On définit un morphisme  $\overline{\kappa}_{\mathbb{C}}$  par le diagramme commutatif, noté  $\mathcal{D}_2$ , suivant

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}(U)}^{2d-1}(\pi_U^* \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U}(d)) & \xrightarrow{\quad} & \text{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(U)}^{2d-1}(\pi_U^* \overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, \overline{\mathcal{L}og_U}(d)_{\mathbb{C}}) \\
 \parallel & \text{(adjonction)} & \parallel \\
 \text{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}(S)}^{2d-1}(\overline{\mathcal{H}}, R\pi_{U*} \overline{\mathcal{L}og_U}(d)) & \xrightarrow{\quad} & \text{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(S)}^{2d-1}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, R\pi_{U*} \overline{\mathcal{L}og_U}(d)_{\mathbb{C}}) \\
 \parallel & \text{(prop. du log.)} & \parallel \\
 \text{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}(S)}(\overline{\mathcal{H}}, R^{2d-1} \pi_{U*} \overline{\mathcal{L}og_U}(d)) & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(S)}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, R^{2d-1} \pi_{U*} \overline{\mathcal{L}og_U}(d)_{\mathbb{C}}) \\
 \downarrow \rho_* \sim & & \downarrow (\overline{\rho}_{\mathbb{C}})_* \\
 \text{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}(S)}(\overline{\mathcal{H}}, \prod_{n=1}^{\infty} \overline{\text{Sym}}^n \overline{\mathcal{H}}) & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(S)}(\overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, \prod_{n=1}^{\infty} \overline{\text{Sym}}^n \overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}})
 \end{array}$$

$\overline{\kappa} \sim$  (à gauche) (à droite)  $\sim \overline{\kappa}_{\mathbb{C}}$

dans lequel les flèches horizontales sont induites par l'extension des scalaires de  $\mathbb{Q}$  à  $\mathbb{C}$ .

**Lemme 4.3** – *L'extension  $\text{For}(\mathcal{P}ol) \in \text{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}(U)}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)}) \subseteq \text{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(U)}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)_{\mathbb{C}}})$  est caractérisée par*

$$\overline{\kappa}_{\mathbb{C}}(\text{For}(\mathcal{P}ol)) = \text{Id}_{\overline{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}}.$$

*Démonstration* – L'inclusion  $\text{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}(U)}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)}) \subseteq \text{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(U)}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)_{\mathbb{C}}})$  résulte de la commutativité du diagramme  $\mathcal{D}_2$  et de la caractérisation du Lemme 4.2.

□

### 4.3 Description du polylogarithme d'un schéma abélien au niveau topologique

L'objectif de cette partie est de démontrer que les courants définis par Levin dans [L] permettent de décrire

$$\text{For}(\mathcal{P}ol) \in \text{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}(U)}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)}) \subseteq \text{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(U)}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)_{\mathbb{C}}}).$$

On démontre ainsi un résultat qui avait été conjecturé par Levin.

#### 4.3.1 Équation différentielle et polylogarithme

On considère le complexe de de Rham des courants sur  $A^\infty$  à valeurs dans le pro-fibré vectoriel  $\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}}$  (cf. partie 2.7),  $(\mathcal{A}^\bullet(\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}}) := \prod_{n=0}^{\infty} ((\text{Sym}^n \pi^* \mathcal{H})(d)_{\mathbb{C}}) \otimes \mathcal{A}_{A^\infty}^\bullet, \nabla_{\mathbb{C}}^\bullet)$ . C'est une résolution  $\overline{\pi}_*$ -acyclique de  $(\overline{\mathcal{L}og_U(d)})_{\mathbb{C}}$ .

**Notation 4.4** – *Soit  $f: \overline{\pi_U^* \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \rightarrow \mathcal{A}^{2d-1}(\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}})_{|\overline{U}}$  un morphisme tel que  $(\nabla_{\mathbb{C}}^{2d-1})_{|\overline{U}} \circ f = 0$ . Le diagramme*

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & \longrightarrow & \overline{\pi_U^* \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow f & & \\ 0 & \longrightarrow & (\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}})_{|\overline{U}} & \xrightarrow{(\nabla_{\mathbb{C}})_{|\overline{U}}} & \dots & \longrightarrow & \mathcal{A}^{2d-1}(\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}})_{|\overline{U}} \xrightarrow{(\nabla_{\mathbb{C}}^{2d-1})_{|\overline{U}}} \mathcal{A}^{2d}(\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}})_{|\overline{U}} \longrightarrow \dots \\ & & \uparrow qis & & & & \\ 0 & \longrightarrow & (\overline{\mathcal{L}og_U(d)})_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

définit un élément de  $\text{Hom}_{D^b(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(U))}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}, (\overline{\mathcal{L}og_U(d)})_{\mathbb{C}}[2d-1])$  que l'on note  $M(f)$ .

**Théorème 4.5** – *Soit  $f: \overline{\pi^* \mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \rightarrow \mathcal{A}_{A^\infty}^{2d-1}(\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}})$  un morphisme dans  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(A)$  vérifiant la propriété (P) suivante :*

$$(P) \quad \nabla^{2d-1} \circ f = (2\pi i)^d \delta_{S^\infty} \text{Id}_{\overline{\pi^* \mathcal{H}_{\mathbb{C}}}},$$

où  $S^\infty$  est vue comme une sous-variété fermée de  $A^\infty$  via  $e^\infty$ . Alors, on a :

1.  $\nabla_{|\overline{U}}^{2d-1} \circ f_{|\overline{U}} = 0$ .
2.  $M(f_{|\overline{U}}) = \overline{\mathcal{P}ol}$ .

**Notations 4.6** Pour  $(E, \nabla)$  un fibré vectoriel réel à connexion plate et  $f: (E_1, \nabla_1) \rightarrow (E_2, \nabla_2)$  un morphisme de fibrés vectoriels réels à connexions plates, on note :

- $E^\circ$  le système local  $\text{Ker}(\nabla)$ ,
- $f^\circ$  le morphisme de systèmes locaux induit par  $f$  entre  $E_1^\circ$  et  $E_2^\circ$ .

*Démonstration* –

1. C'est une conséquence immédiate de la propriété (P).
2. D'après le Lemme 4.3, il suffit de démontrer l'assertion suivante

$$(A_1) \quad \bar{\kappa}_{\mathbb{C}}(M(f|_{\bar{U}})) = Id_{\bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}},$$

ce que l'on fait ci-dessous.

- a) On commence par réduire le calcul de  $\bar{\kappa}_{\mathbb{C}}(M(f|_{\bar{U}}))$  dans lequel interviennent des courants à valeurs dans un pro-fibré vectoriel  $\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}}$  à plusieurs calculs ne mettant en jeu que des courants à valeurs dans des fibrés vectoriels (les fibrés  $\mathcal{G}_l(d)_{\mathbb{C}}$ , tronqués de  $\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}}$ ). On rappelle que le morphisme  $\bar{\kappa}_{\mathbb{C}}$  est donné par la composition

$$(\bar{\rho}_{\mathbb{C}})_* \circ H^0 \circ adj,$$

où

$adj: \text{Hom}_{D^b \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(U)}(\bar{\pi}_U^* \bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)}_{\mathbb{C}}[2d-1]) \rightarrow \text{Hom}_{D^b \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(S)}(\bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, R(\bar{\pi}_U)_* \overline{\mathcal{L}og_U(d)}_{\mathbb{C}}[2d-1])$  est l'isomorphisme d'adjonction,

$$H^0: \text{Hom}_{D^b \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(S)}(\bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, R(\bar{\pi}_U)_* \overline{\mathcal{L}og_U(d)}_{\mathbb{C}}[2d-1]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(S)}(\bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, R^{2d-1}(\bar{\pi}_U)_* \overline{\mathcal{L}og_U(d)}_{\mathbb{C}}),$$

$\bar{\rho}_{\mathbb{C}}: R^{2d-1}(\bar{\pi}_U)_* \overline{\mathcal{L}og_U(d)}_{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{e}^* \overline{\mathcal{L}og}_{\mathbb{C}}$  est un morphisme de bord qui apparaît dans la suite exacte longue de cohomologie locale associée à la situation géométrique suivante :

$$\bar{e}: \bar{S} \hookrightarrow \bar{A} \leftarrow \bar{U},$$

avec comme coefficient le pro-système local  $\overline{\mathcal{L}og(d)}_{\mathbb{C}}$ .

Pour prouver la relation  $\bar{\kappa}_{\mathbb{C}}(M(f|_{\bar{U}})) = Id_{\bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}}$ , il suffit de démontrer que pour tout  $l \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ , l'assertion suivante est valide :

$$(A_2) \quad \bar{\kappa}_{\mathbb{C}}^l(M^l((p_l^c \circ f)_{\bar{U}})) = Id_{\bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}},$$

où

$\bar{\kappa}_{\mathbb{C}}^l: \text{Hom}_{D^b \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(U)}(\bar{\pi}_U^* \bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, (\mathcal{G}_l^\circ)_{\bar{U}}(d)_{\mathbb{C}}[2d-1]) \rightarrow \bar{e}^*(\mathcal{G}_l^\circ)_{\mathbb{C}} = \prod_{k=1}^l \text{Sym}^k \bar{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}$  est défini de manière analogue à  $\bar{\kappa}_{\mathbb{C}}$  en prenant cette fois  $\mathcal{G}_l^\circ(d)_{\mathbb{C}}$  comme coefficient,

$M^l((p_l^c \circ f)_{\bar{U}})$  est défini de manière analogue à  $M(f|_{\bar{U}})$  en considérant  $\mathcal{G}_l^\circ(d)_{\mathbb{C}}$  comme coefficient (cf. ci-dessous),

$p_l^c: \mathcal{A}_{A^\infty}^{2d-1}(\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathcal{A}_{A^\infty}^{2d-1}(\mathcal{G}_l(d)_{\mathbb{C}})$  est le morphisme obtenu en poussant les  $(2d-1)$ -courants sur  $A^\infty$  à valeurs dans  $\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}}$  à l'aide du morphisme  $p_l$  dans la partie 3.3.2.



On fixe  $l \in \mathbb{N}^{\geq 2}$  pour la suite de la démonstration. Puisque  $f$  vérifie la propriété (P),  $p_l^c \circ f$  vérifie la propriété suivante :

$$\nabla_l^{2d-1} \circ p_l^c \circ f = (2\pi i)^d \delta_{S^\infty} Id_{\pi^* \overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}}$$

et en particulier  $(\nabla_l^{2d-1} \circ p_l^c \circ f)|_{\overline{U}} = 0$ , ce qui implique que  $M^l((p_l^c \circ f)|_{\overline{U}})$  est bien défini.

b) L'assertion  $(A_2^l)$  est de nature locale. Soient  $s \in S(\mathbb{C})$  et  $V$  un voisinage ouvert connexe et simplement connexe de  $s$  dans  $S(\mathbb{C})$ . On souhaite décrire le morphisme

$$\overline{\kappa}_{\mathbb{C}}^l(M^l((p_l^c \circ f)|_{\overline{U}}))_V : \Gamma(V, \overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}) \rightarrow \Gamma(V, \overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}).$$

On introduit, pour ce faire, la notation suivante. Soient  $X$  une variété algébrique complexe,  $F$  une sous-variété algébrique fermée de codimension pure  $d$ ,  $i : F \hookrightarrow X$  l'immersion fermée correspondante et  $\mathbb{V}$  un (pro-)système local de  $\mathbb{R}$ -vectoriels sur  $\overline{X}$ . Alors on a une identification canonique  $\overline{i}^! \mathbb{V} = \overline{i}^* V(-d)[-2d]$ . Soient  $F'$  un ouvert de  $\overline{F}$  et  $X'$  un ouvert de  $\overline{X}$  contenant  $F'$ . On note

$$\rho(F', X', \mathbb{V}) : H^{2d-1}(X' \setminus F', \mathbb{V}(d)_{\mathbb{C}}) \rightarrow H^{2d}(F', \overline{i}^! \mathbb{V}(d)_{\mathbb{C}}) = \Gamma(F', \overline{i}^* \mathbb{V}_{\mathbb{C}})$$

le morphisme de bord qui apparaît dans la suite exacte longue de cohomologie locale.

Le  $\overline{\kappa}_{\mathbb{C}}^l(M^l((p_l^c \circ f)|_{\overline{U}}))_V$  est donné par la composition suivante :

$$\begin{array}{c} \Gamma(V, \overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}) \\ \parallel \\ \Gamma(\overline{\pi}^{-1}(V), \overline{\pi}^* \overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}) \\ \downarrow (p_l^c \circ f)_{\overline{\pi}^{-1}(V)} \\ \left\{ c \in \Gamma(\overline{\pi}^{-1}(V), \mathcal{A}_{A^\infty}^{2d-1}((\mathcal{G}_l(d))_{\mathbb{C}})) : (\nabla_l^{2d-1}(c))|_{\overline{\pi}^{-1}(V) \setminus V} = 0 \right\} \\ \downarrow \\ H^{2d-1}(\overline{\pi}^{-1}(V) \setminus V, (\mathcal{G}_l^\circ(d))_{\mathbb{C}}) \\ \downarrow \rho(V, \overline{\pi}^{-1}(V), \mathcal{G}_l^\circ) \\ \Gamma(V, \overline{e}^*(\mathcal{G}_l^\circ)_{\mathbb{C}}) \\ \parallel \\ \prod_{k=0}^l \text{Sym}^k \Gamma(V, \overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}). \end{array}$$

Pour démontrer localement en  $s$  l'assertion  $(A_2^l)$ , il suffit donc de prouver que :

$$(A_3^l) \quad \text{pour tout } h \in \Gamma(V, \overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}), c \in \Gamma(\overline{\pi}^{-1}(V), \mathcal{A}_{A^\infty}^{2d-1}(\mathcal{G}_l(d)_{\mathbb{C}})) \text{ tel que } \nabla_l^{2d-1}(c) = (2\pi i)^d \delta_V h, \text{ on a } \rho(V, \overline{\pi}^{-1}(V), \mathcal{G}_l^\circ)([c]_{\overline{\pi}^{-1}(V) \setminus V}) = h.$$

c) On explique maintenant comment passer du coefficient  $\mathcal{G}_l^\circ$  au coefficient trivial  $\mathbb{R}$ . Le morphisme  $\rho(V, \overline{\pi}^{-1}(V), \mathcal{G}_l^\circ)$  étant un morphisme de bord dans une suite exacte de cohomologie locale, on peut remplacer  $\overline{\pi}^{-1}(V)$  par un voisinage ouvert de  $V$  dans  $\overline{A}$ . Soit  $W$

un voisinage ouvert de  $e(s)$  dans  $\overline{A}$  sur lequel le fibré vectoriel réel à connexion intégrable  $(\mathcal{G}_l, \nabla_l)$  est isomorphe au fibré trivial de fibre  $\prod_{k=0}^l \text{Sym}^k \Gamma(V, \overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{R}})$  muni de la connexion de Gauss-Manin. Quitte à remplacer  $V$  par un voisinage ouvert de  $s$  dans  $\overline{S}$  qui est connexe et simplement connexe, on peut supposer que  $V \subseteq W$ . On est ainsi ramené au cas où le coefficient est trivial, i.e. il suffit de démontrer que :

$$(A_4) \quad \text{pour tout } c \in \Gamma(W, \mathcal{A}_{A^\infty}^{2d-1}(\mathbb{R}(d)_{\mathbb{C}})) \text{ tel que } dc = (2\pi i)^d \delta_V, \text{ on a } \rho(V, W, \mathbb{R})([c|_{W \setminus V}]) = 1.$$

d) Compte-tenu du caractère local de l'assertion  $(A_4)$  et de la structure locale des immersions fermées en géométrie analytique, il suffit, modulo l'application d'un biholomorphisme, de démontrer l'assertion  $(A_4)$  dans la situation géométrique suivante :

- i)  $V$  est une boule ouverte de  $\mathbb{C}^n$  contenant 0 ( $n \in \mathbb{N}$ ).
- ii)  $s = 0 \in V$ .
- iii)  $W = V \times B(0, 1)$  où  $B(0, 1)$  est la boule ouverte de  $\mathbb{C}^d$  centrée en 0 et de rayon 1.
- iv) L'immersion fermée  $e^\infty: V \hookrightarrow V \times B(0, 1)$  est donnée par  $v \mapsto (v, 0)$ .

On se place désormais dans ce contexte géométrique. On souhaite maintenant réduire la démonstration de l'assertion  $(A_4)$  à la preuve d'un cas particulier de celle-ci :  $V = \{0\}$ ,  $W = B(0, 1)$  et  $c$  est le courant associé à la forme de Bochner-Martinelli dont on rappelle succinctement la construction. On donne également l'équation différentielle que satisfait ce courant.

Soit  $\beta$  la  $(2d - 1)$ -forme différentielle sur  $B(0, 1) \setminus \{0\}$

$$\beta := F^* K,$$

où  $K$  désigne le noyau de Bochner-Martinelli et  $F$  est l'application de  $B(0, 1) \setminus \{0\}$  dans  $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d$  définie par  $F(z) = (2z, z)$  pour  $z \in B(0, 1) \setminus \{0\}$  (cf. [GH, p. 371 et 655]). Alors  $d\beta = 0$  et les coefficients de  $\beta$  sont localement  $L^1$ . Ainsi,  $\beta$  définit un courant sur  $B(0, 1)$  que l'on note  $\overline{\beta}$ . La dérivée de ce courant vérifie  $d\overline{\beta} = \delta_0$  (cf. [GH, p. 371 et 372]).

On introduit alors l'assertion suivante

$$(A_5) \quad \rho(\{0\}, B(0, 1), \mathbb{R})((2\pi i)^d \beta) = 1.$$

et on démontre que celle-ci implique  $(A_4)$ .

On suppose l'assertion  $(A_5)$  vérifiée et on fixe  $c \in \Gamma(V \times B, \mathcal{A}_{A^\infty}^{2d-1}(\mathbb{R}(d)_{\mathbb{C}}))$  tel que  $dc = (2\pi i)^d \delta_V$ .

- Soit  $pr: V \times B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$  la projection canonique. On remarque, en considérant l'expression en coordonnées de  $\beta$  que tous les coefficients de  $(pr^{B(0, 1) \setminus \{0\}})^* \beta$  sont  $L^1$ . La forme différentielle  $(pr^{B(0, 1) \setminus \{0\}})^* \beta$  définit donc un courant que l'on note  $pr^* \overline{\beta}$ . (L'existence d'un pullback n'est pas assurée pour les courants en général et c'est cette propriété d'extension de la forme  $(pr^{B(0, 1) \setminus \{0\}})^* \beta$  en un courant défini sur  $W$  qui explique, entre autre, la considération de  $\beta$ . Une autre motivation est la formule de Bochner-Martinelli utilisée ci-après.) D'autre part, on vérifie, à l'aide de l'équation  $d\overline{\beta} = \delta_0$  que le courant

$pr^*\overline{\beta}$  satisfait l'équation :

$$(*) \quad d \, pr^*\overline{\beta} = \delta_V.$$

- Comme  $\rho(V, W, \mathbb{R})$  est le morphisme bord d'une suite exacte longue de cohomologie locale et  $dc = (2\pi i)^d d \, pr^*\overline{\beta}$  (d'après (\*)), on a

$$\begin{aligned} \rho(V, W, \mathbb{R})([c_{|W \setminus V}]) &= \rho(V, W, \mathbb{R})([(2\pi i)^d (pr^*\overline{\beta})_{|W \setminus V}]) \\ &= (2\pi i)^d \rho(V, W, \mathbb{R})([pr^{*|B(0,1) \setminus \{0\}} \beta]). \end{aligned}$$

Il suffit donc de considérer le cas particulier  $c = (2\pi i)^d pr^*\overline{\beta}$  pour démontrer  $(A_4)$ .

- On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{e^\infty} & V \times B(0, 1) \\ \uparrow i & & \uparrow i' \\ \{0\} & \xrightarrow{(e^\infty)_0} & B(0, 1) \end{array}$$

dans lequel les morphismes  $i$ ,  $i'$  et  $(e^\infty)_0$  sont définis par

$$i(0) = 0, \quad \forall b \in B(0, 1) \quad i'(b) = (0, b) \quad \text{et} \quad (e^\infty)_0(0) = 0.$$

On vérifie que l'on a la relation suivante :

$$\begin{aligned} \rho(V, W, \mathbb{R})([pr^{*|B(0,1) \setminus \{0\}} \beta]) &= \rho(\{0\}, B(0, 1), \mathbb{R})((i'_{|B(0,1) \setminus \{0\}})^* [(pr^{*|B(0,1) \setminus \{0\}} \beta)]) \\ &= \rho(\{0\}, B(0, 1), \mathbb{R})([(i'_{|B(0,1) \setminus \{0\}})^* (pr^{*|B(0,1) \setminus \{0\}} \beta)]) \\ &= \rho(\{0\}, B(0, 1), \mathbb{R})([\beta]). \end{aligned}$$

La preuve de l'implication  $(A_5) \Rightarrow (A_4)$  est ainsi achevée.

- e) Il reste donc à démontrer l'assertion  $(A_5)$ . D'après [I, V.7], on a :

$$\rho(\{0\}, B(0, 1), \mathbb{R})([\beta]) = (2\pi i)^{-d} \int_{\partial B(0, r)} \beta_{|\partial B(0, r)},$$

où  $B(0, r)$  est la boule de  $\mathbb{C}^d$  centrée en 0 et de rayon  $r \in ]0, 1[$ . L'assertion  $(A_5)$  est alors conséquence de la formule de Bochner-Martinelli (cf. [GH, p. 372]) :

$$\int_{\partial B(0, r)} \beta_{|\partial B(0, r)} = 1.$$

□

### 4.3.2 Les courants de Levin

Soit  $\omega$  une polarisation du schéma abélien  $\pi: A \rightarrow S$ . Dans [L], Levin définit, à partir de  $\omega$ , des séries de formes différentielles sur  $A^\infty$  à valeurs dans  $\text{Sym}^{a-1}(\mathcal{O}_{A^\infty} \otimes \pi^* \overline{\pi^* \mathcal{H}_{\mathbb{C}}})$ , notées  $g'_a$  ( $a \in \mathbb{N}^*$ ). On précise ci-dessous en quel sens ces séries convergent et on donne des indications quant à la manière d'établir ces résultats de convergence.

- Pour  $a > 2d$ ,  $g'_a$  converge uniformément vers une forme différentielle sur  $A^\infty$ .

En effet, comme il s'agit d'une assertion de nature locale, on peut supposer que  $S$  est un ouvert de  $\mathbb{C}^n$  et que  $(\pi: A \rightarrow S, \omega)$  est un pullback de la famille universelle de variétés abéliennes polarisée considérée par Levin (cf. [L, 2.3]), en modifiant éventuellement la polarisation qu'il introduit, de manière à tenir compte du type de la polarisation  $\omega$ . Dans ce cas, on dispose de coordonnées globales et d'une formule "explicite" pour  $g'_a$ . On montre alors la convergence de  $g'_a$  en utilisant que la série numérique

$$\sum_{n_1 + \dots + n_{2d} \in \mathbb{Z}^{2d} \setminus \{0\}} (n_1^2 + \dots + n_{2d}^2)^{-a/2}$$

converge si  $a > 2d$ .

- Pour  $a \leq 2d$ ,  $g'_a$ , vues comme séries de courants, convergent au sens des courants (cf. partie 2.6).

Pour le voir, l'énoncé étant local, on peut procéder comme ci-dessus pour obtenir une formule "explicite" de  $g'_a$ . On applique alors un opérateur de Laplace (associé aux coordonnées verticales), éventuellement plusieurs fois, à des séries de formes différentielles convergeant uniformément (dont la convergence peut s'établir comme celle des séries  $g'_a$  pour  $a > 2d$ ) pour obtenir  $g'_a$  et conclure. La démonstration est analogue à celle de [T, Thm 3.1.3].

À l'aide de ces séries, il construit un morphisme  $\mathcal{P}_\omega: \pi^* \overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{A}^{2d-1}(\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}})$  (cf. [L, Thm 3.4.4]). Pour une expression explicite de  $\mathcal{P}_\omega$ , dans le cas où le schéma abélien est une famille modulaire de Siegel (resp. Hilbert-Blumenthal), on peut consulter [L, 2.3] (resp. [B]). Levin démontre que  $\mathcal{P}_\omega$  vérifie la propriété (P) du théorème précédent [L, Thm 3.4.4] et conjecture que ce morphisme décrit  $\mathcal{P}ol$ . Du Théorème 4.5, on déduit une preuve de cette conjecture. Précisément, on a le corollaire suivant.

**Corollaire 4.7** – Soit  $\omega$  une polarisation du schéma abélien  $A/S$ . Le morphisme  $\mathcal{P}_\omega$  de Levin décrit le polylogarithme au niveau topologique, i.e.  $M((\mathcal{P}_\omega)_{|\overline{U}}) = For(\mathcal{P}ol)$ .  $For(\mathcal{P}ol)$  coïncide donc avec l'élément de  $Hom_{D^b(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(U))}(\pi_U^* \overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}, (\overline{\mathcal{L}og_U(d)})_{\mathbb{C}}[2d-1])$  défini par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi_U^* \overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow (\mathcal{P}_\omega)_{|\overline{U}} & & \\ 0 & \longrightarrow & (\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}})_{|\overline{U}} & \xrightarrow{(\nabla_{\mathbb{C}})_{|\overline{U}}} \dots \longrightarrow & \mathcal{A}^{2d-1}(\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}})_{|\overline{U}} & \xrightarrow{(\nabla_{\mathbb{C}}^{2d-1})_{|\overline{U}}} & \mathcal{A}^{2d}(\mathcal{G}(d)_{\mathbb{C}})_{|\overline{U}} \longrightarrow \dots \\ & & \uparrow qis & & & & \\ 0 & \longrightarrow & (\overline{\mathcal{L}og_U(d)})_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

On termine cette partie avec un résultat concernant la lissité des courants de Levin.

**Proposition 4.8** (Levin) – Pour tout ouvert  $V$  de  $\overline{U}$ , tout  $h \in \Gamma(V, \pi^* \overline{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}})$ , le courant  $\mathcal{P}_\omega(h)$  est lisse sur  $V$ .

*Démonstration* – L'assertion se déduit de [L, Proposition 3.4.2] et de la Proposition A2.1 de l'appendice.  $\square$

## 5 Les classes d'Eisenstein d'un schéma abélien

Soit  $x: S \rightarrow A$  une section de torsion et soit  $l \in \mathbb{N}$ . On définit deux applications  $val_x^l$  et  $\overline{val}_x^l$  par le diagramme commutatif (cf. compatibilité des formalismes des 6 foncteurs au niveau des modules de Hodge et au niveau topologique via le foncteur  $For$ ) suivant noté  $\mathcal{D}_3$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ext}_{MHM(U)}^{2d-1}(\pi_U^* \mathcal{H}, \mathcal{L}og_U(d)) & \xrightarrow{\text{For}} & \text{Ext}_{\mathcal{F}_Q(U)}^{2d-1}(\overline{\pi_U^* \mathcal{H}}, \overline{\mathcal{L}og_U(d)}) \\
 \downarrow x^* & \text{(cf. partie 3.4.3)} & \downarrow \overline{x^*} \\
 \text{Ext}_{MHM(S)}^{2d-1}(\mathcal{H}, \prod_{n=0}^{\infty} (\text{Sym}^n \mathcal{H})(d)) & \xrightarrow{\text{For}} & \text{Ext}_{\mathcal{F}_Q(S)}^{2d-1}(\overline{\mathcal{H}}, \prod_{n=0}^{\infty} \overline{(\text{Sym}^n \mathcal{H})(d)}) \\
 \parallel & \text{(dualité)} & \parallel \\
 \text{Ext}_{MHM(S)}^{2d-1}(\mathbb{Q}(0), \prod_{n=0}^{\infty} (\text{Sym}^n \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^\vee(d))) & \xrightarrow{\text{For}} & H_{\text{Betti}}^{2d-1}(\overline{S}, \prod_{n=0}^{\infty} \overline{(\text{Sym}^n \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^\vee(d))}) \\
 \downarrow pr_{l+1} & & \downarrow pr_{l+1} \\
 \text{Ext}_{MHM(S)}^{2d-1}(\mathbb{Q}(0), (\text{Sym}^{l+1} \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^\vee(d))) & \xrightarrow{\text{For}} & H_{\text{Betti}}^{2d-1}(\overline{S}, (\overline{\text{Sym}^{l+1} \mathcal{H}} \otimes \overline{\mathcal{H}^\vee(d)})) \\
 \downarrow \text{contraction} & & \downarrow \text{contraction} \\
 \text{Ext}_{MHM(S)}^{2d-1}(\mathbb{Q}(0), (\text{Sym}^l \mathcal{H})(d)) & \xrightarrow{\text{For}} & H_{\text{Betti}}^{2d-1}(\overline{S}, (\text{Sym}^l \mathcal{H})(d))
 \end{array}$$

$val_x^l$   $\overline{val}_x^l$

**Définition 5.1** – L'extension  $val_x^l(\text{Pol})$  est appelée  $l$ -ième classe d'Eisenstein du schéma abélien  $\pi: A \rightarrow S$  associée à  $x$  et notée  $\mathcal{E}is_x^l$ .

**Remarque 5.2** – D'après un théorème de Kings,  $\mathcal{E}is_x^l$  est d'origine motivique (voir [Ki]).

L'application  $\overline{val}_x^l$  a un analogue pour des coefficients complexes que l'on définit par le diagramme commutatif suivant noté  $\mathcal{D}_4$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ext}_{\mathcal{F}_Q(U)}^{2d-1}(\pi_U^* \mathcal{H}, \mathcal{L}og_U(d)) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{F}_C(U)}^{2d-1}(\pi_U^* \mathcal{H}_C, \mathcal{L}og_U(d)_C) \\
 \downarrow x^* & \text{(cf. partie 3.4.3)} & \downarrow \overline{x^*} \\
 \text{Ext}_{\mathcal{F}_Q(S)}^{2d-1}(\overline{\mathcal{H}}, \prod_{n=0}^{\infty} \overline{(\text{Sym}^n \mathcal{H})(d)}) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{F}_C(S)}^{2d-1}(\overline{\mathcal{H}}_C, \prod_{n=0}^{\infty} \overline{(\text{Sym}^n \mathcal{H})(d)}_C) \\
 \parallel & \text{(dualité)} & \parallel \\
 H_{\text{Betti}}^{2d-1}(\overline{S}, \prod_{n=0}^{\infty} \overline{(\text{Sym}^n \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^\vee(d))}) & \longrightarrow & H_{\text{Betti}}^{2d-1}(\overline{S}, \prod_{n=0}^{\infty} \overline{(\text{Sym}^n \mathcal{H})_C \otimes \mathcal{H}^\vee(d)}_C) \\
 \downarrow pr_{l+1} & & \downarrow pr_{l+1} \\
 H_{\text{Betti}}^{2d-1}(\overline{S}, (\overline{\text{Sym}^{l+1} \mathcal{H}} \otimes \overline{\mathcal{H}^\vee(d)})) & \longrightarrow & H_{\text{Betti}}^{2d-1}(\overline{S}, (\overline{\text{Sym}^{l+1} \mathcal{H}}_C \otimes \overline{\mathcal{H}^\vee(d)}_C) \\
 \downarrow \text{contraction} & & \downarrow \text{contraction} \\
 H_{\text{Betti}}^{2d-1}(\overline{S}, (\text{Sym}^l \mathcal{H})(d)) & \longrightarrow & H_{\text{Betti}}^{2d-1}(\overline{S}, (\text{Sym}^l \mathcal{H})(d)_C)
 \end{array}$$

$\overline{val}_x^l$   $(\overline{val}_x^l)_C$

dans lequel les flèches horizontales sont induites par l'extension des scalaires de  $\mathbb{Q}$  à  $\mathbb{C}$ .

**Remarque 5.3** – *Étant donnée une polarisation  $\omega$  du schéma abélien  $A/S$ , on peut alors expliciter*

$$For(\mathcal{E}is_x^l) \in H_{Betti}^{2d-1}(\overline{S}, \overline{(Sym^l \mathcal{H})(d)}) \subseteq H_{Betti}^{2d-1}(\overline{S}, \overline{(Sym^l \mathcal{H})(d)}_{\mathbb{C}})$$

*à l'aide de l'identité*

$$For(\mathcal{E}is_x^l) = (\overline{val_x^l})_{\mathbb{C}}(M((\mathcal{P}_\omega)_{|\overline{U}}))$$

*qui se déduit du Corollaire 4.7 et de la commutativité des diagrammes  $\mathcal{D}_3$  et  $\mathcal{D}_4$ , dans le cas où  $l > 2d$  (cf. convergence des séries de Levin discutée dans la partie 4.3.2).*

Dans [B], on effectue ce calcul pour le schéma abélien universel au-dessus d'une variété de Hilbert-Blumenthal. Le résultat est que, dans ce cas,  $For(\mathcal{E}is_x^l)$  s'exprime à l'aide de séries d'Eisenstein-Kronecker et l'on démontre, en utilisant le Corollaire 4.7, que certaines classes d'Eisenstein sont non nulles en établissant qu'elles dégénèrent au bord de la compactification de Baily-Borel de la base en des valeurs spéciales de fonctions  $L$  associées au corps de nombres totalement réel sous-jacent.

# Appendix

by

Andrey Levin

email : alevin@wave.sio.rssi.ru

We prove a smoothness result for the polylogarithmic current defined in [L]. Essentially this is rather standard exercise in the Riemann method for analytic continuation of the  $\zeta$ -function.

**Notations** – For  $X$  a complex analytic variety, we denote

- $X^\infty$  the  $\mathcal{C}^\infty$  differential variety associated to  $X$ ,
- $\mathcal{O}_{X^\infty}$  the sheaf of real valued differentiable functions on  $X^\infty$ ,
- $TX^\infty$  the real tangent bundle of  $X^\infty$ .

## A1. Polylogarithmic currents

Let  $S$  be a complex analytic variety and  $(\pi: X \rightarrow S, e: S \rightarrow B, \omega)$  be a family of abelian varieties over  $S$  as defined in [L, 1.1.2], i.e.  $\pi$  is a proper smooth morphism of complex analytic varieties of relative dimension  $d$ ,  $X_s := \pi^{-1}(s)$  is a  $d$ -dimensional complex torus for each  $s \in S$ ,  $e$  is a section of  $\pi$  and  $\omega$  is a  $(1,1)$ -cohomology class on  $X^\infty$  such that the restriction to each  $X_s$  is a polarization for each  $s \in B$ .

Let  $\Lambda$  be the dual of the local system  $\mathbb{R}^1\pi_*\mathbb{Z}$  over  $S$ . Its stalk at  $s \in S$  is  $H_1(X_b, \mathbb{Z})$  and it is equipped with a natural structure of variation of pure Hodge structures of type  $\{(-1,0), (0,-1)\}$  over  $S$ . Thus the complex vector bundle  $\mathcal{H} := \Lambda \otimes \mathcal{O}_{S^\infty} \otimes \mathbb{C}$  has a canonical Hodge decomposition  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{-1,0} \oplus \mathcal{H}^{0,-1}$ .

The polylogarithmic current is a  $(2d-2)$ -current on  $X^\infty$  with values in the complex vector bundle  $\prod_{k \geq 0} \text{Sym}^k \pi^* \mathcal{H}$ . In this part we recall the definition of these currents when  $S$  is simply connected. For arbitrary  $S$ , the polylogarithmic currents can be obtained by gluing the objects resulting to the local construction we are going to explain.

### A1.1 The fibrewise exponential map

We have the following exact sequence of abelian groups over  $S$  :

$$0 \rightarrow \Lambda \xrightarrow{i} e^*T(X^\infty/S^\infty) \xrightarrow{\exp_{X^\infty/S^\infty}} X^\infty \rightarrow 0, \quad (1)$$

where  $T(X^\infty/S^\infty)$  is the relative tangent bundle of  $\pi: X^\infty \rightarrow S^\infty$  and  $\exp_{X^\infty/S^\infty}$  is the fibrewise exponential map. The monomorphism  $i$  induces an isomorphism  $\tilde{i}: \Lambda \otimes \mathcal{O}_{S^\infty} \xrightarrow{\sim} e^*T(X^\infty/S^\infty)$ .

### A1.2 $\mathcal{C}^\infty$ -trivialisation

**Assumption** – Let  $S$  be simply connected.

We fix a base point  $s_0 \in S$ . Since  $S$  is simply connected, there exists a canonical isomorphism  $\iota: \underline{\Lambda}_{s_0} \xrightarrow{\sim} \underline{\Lambda}$ , where  $\underline{\Lambda}_{s_0}$  is the constant sheaf on  $S$  associated to  $\Lambda_{s_0} = H_1(A_{s_0}, \mathbb{Z})$ . The isomorphism  $\tilde{i} \circ \iota \otimes \text{Id}_{\mathcal{O}_{S^\infty}}: \underline{\Lambda}_{s_0} \otimes \mathcal{O}_{S^\infty} \rightarrow e^*T(X^\infty/S^\infty)$  of sheaves of locally free  $\mathcal{O}_{S^\infty}$ -modules corresponds to a unique isomorphism of vector bundles over  $S^\infty$  which we also denote  $\tilde{i} \circ \iota \otimes \text{Id}_{\mathcal{O}_{S^\infty}}$

$$\tilde{i} \circ \iota \otimes \text{Id}_{\mathcal{O}_{S^\infty}}: S^\infty \times (\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}) \rightarrow e^*T(X^\infty/S^\infty).$$

We observe that  $\exp_{X^\infty/S^\infty} \circ (\tilde{i} \circ \iota \otimes \text{Id}_{\mathcal{O}_{S^\infty}}): S^\infty \times (\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}) \rightarrow X^\infty$  induces (cf exact sequence (1)) an isomorphism of families of real tori over  $S^\infty$

$$\varphi: S^\infty \times (\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}/\Lambda_{s_0}) \rightarrow X^\infty.$$

The tangent bundle of  $\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}/\Lambda_{s_0}$  can be naturally identified with the trivial vector bundle  $(\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}/\Lambda_{s_0}) \times (\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R})$ . Thus we have a natural identification

$$T(S^\infty \times (\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}/\Lambda_{s_0})) = pr_1^* TS^\infty \oplus (S^\infty \times (\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}/\Lambda_{s_0})) \times (\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}), \quad (2)$$

where  $pr_1$  is the canonical projection  $S^\infty \times (\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}/\Lambda_{s_0}) \rightarrow S^\infty$ .

### A1.3 Polarisation form and symplectic pairings

The  $(1,1)$ -form  $\omega$  on  $X^\infty$  induces a pairing  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \Lambda_{s_0} \wedge \Lambda_{s_0} \rightarrow \mathbb{Z}(1)$ . Extending this pairing by linearity we get two other pairings

$$(\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{C}) \wedge (\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{and} \quad (\Lambda_{s_0} \otimes \mathcal{O}_{X^\infty}) \wedge (\Lambda_{s_0} \otimes \mathcal{O}_{X^\infty}) \rightarrow \mathcal{O}_{X^\infty}$$

also denoted by the symbol  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

We remark that the symplectic pairing  $\langle \cdot, \cdot \rangle: (\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{C}) \wedge (\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ , which corresponds to an element in  $\bigwedge^2 \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{C}, \mathbb{C})$ , induces a complex differentiable 2-form on  $S^\infty \times (\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}/\Lambda_{s_0})$  (see (2)) which corresponds to  $2 \varphi^* \omega$  (cf proof of the proposition 2.2.4 in [L]).

### A1.4 Definition of the functions $\chi_\lambda$

Let  $\Lambda'_{s_0}$  be the  $2\pi i$ -dual of  $\Lambda_{s_0}$  with respect to  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , i.e.

$$\Lambda'_{s_0} := \{\lambda' \in \Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{C} \mid \langle \lambda', \lambda \rangle \in 2\pi i \mathbb{Z}\},$$

$\kappa$  be the index  $[\Lambda'_{s_0} : \Lambda_{s_0}]$  and  $\lambda \in \Lambda'_{s_0}$ . We define a complex valued function  $\chi_\lambda$  on  $X^\infty$  by

$$\chi_\lambda(x) = \exp(\langle \lambda, pr_2 \circ \varphi^{-1}(x) \rangle) \quad \text{for all } x \in X,$$

where  $pr_2$  denotes the natural projection  $S^\infty \times (\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}/\Lambda_{s_0}) \rightarrow \Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}/\Lambda_{s_0}$ .



## A1.5 Construction of vector fields

The tangent map of  $\varphi$  induces an isomorphism (see (2))

$$pr_1^* TS^\infty \otimes \mathbb{C} \oplus (S^\infty \times (\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}/\Lambda_{s_0})) \times (\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} TA^\infty \otimes \mathbb{C}.$$

Using this isomorphism we associate to each section of

$$\mathcal{H} := \Lambda \otimes \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{S^\infty} \xrightarrow{\iota^{-1} \otimes \text{Id}_{\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{S^\infty}}} \Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{S^\infty} \quad (3)$$

a complex vertical vector field on  $X^\infty$ .

**Convention** – We can canonically associate to a section of  $\mathcal{H}$  over  $S^\infty$  a section of  $\pi^*\mathcal{H}$  over  $X^\infty$  and a complex vertical vector field on  $X^\infty$  as explained before. These three objects are denoted by the same symbol. For example, if  $\lambda \in \Lambda'_{s_0}$  (viewed as a section of  $\mathcal{H}$  over  $S^\infty$  via (3)) and  $\lambda = \lambda^{-1,0} + \lambda^{0,-1}$  is the decomposition of  $\lambda$  with respect to the Hodge decomposition  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{-1,0} \oplus \mathcal{H}^{0,-1}$ , the convention holds for the sections  $\lambda^{-1,0}$  and  $\lambda^{0,-1}$  of  $\mathcal{H}$ .

## A1.6 Definition of the polylogarithmic current

The polylogarithmic current is defined as  $g := \sum_{n \geq 2} \sum_{a,b \geq 1, a+b=n} (-1)^a g_{a,b}$  where for each  $a, b \geq 1$

$$g_{a,b} := \frac{(-1)^d}{d! \kappa} \sum_{\lambda \in \Lambda'_{s_0} \setminus \{0\}} i_{\lambda^{-1,0}} i_{\lambda^{0,-1}} \chi_\lambda \frac{(\lambda^{0,-1})^{a-1} (\lambda^{-1,0})^{b-1}}{(< \lambda^{-1,0}, \lambda^{0,-1} > - [\lambda^{-1,0}])^{a+b}} \omega^d.$$

Here  $i_{\lambda^{-1,0}}$  (resp.  $i_{\lambda^{0,-1}}$ ) denotes the contraction operator associated to the vector field  $\lambda^{-1,0}$  (resp.  $\lambda^{0,-1}$ ) and  $[\lambda^{-1,0}]$  is the Lie derivative corresponding to the vector field  $\lambda^{-1,0}$ . Using the power series expansion of  $(c-x)^{-(a+b)}$  and the vanishing of  $[\gamma^{-1,0}]^k \omega^d$  for  $k > 2d$  [L, Prop 3.2.2], we get

$$g_{a,b} = \sum_{k=0}^{2d} \frac{(-1)^d (a+b+k-1)!}{(a+b-1)! k! d! \kappa} \underbrace{\sum_{\lambda \in \Lambda'_{s_0} \setminus \{0\}} \chi_\lambda \frac{(\lambda^{0,-1})^{a-1} (\lambda^{-1,0})^{b-1}}{(< \lambda^{-1,0}, \lambda^{0,-1} >)^{a+b+k}} i_{\lambda^{-1,0}} i_{\lambda^{0,-1}} [\lambda^{-1,0}]^k \omega^d}_{=: g_{a,b}^k}.$$

One can check that the definition of  $g$  does not depend on the choice of the base point  $s_0$ .

## A2. A smoothness result for the polylogarithmic current

We keep the notations of the previous part.

**Proposition A2.1** – *The restriction of the polylogarithmic current  $g$  over  $X^\infty \setminus e(S^\infty)$  is a smooth current.*

*Proof* – Since the smoothness is a local property we may assume that  $S$  is simply connected and there exists global coordinates  $x_1, \dots, x_{2r}$  on  $S^\infty$ , where  $r$  is the dimension of the complex analytic variety  $S$ . We fix a base point  $s_0 \in S$  as in the part A1. Considering the definition of  $g$  recalled in the part A1 we observe that it is enough to prove the smoothness of  $g_{a,b}^k$  over  $X^\infty \setminus e(S^\infty)$  ( $a, b \geq 1$ ,

$0 \leq k \leq 2d$ ). This is equivalent to prove the smoothness of  $\varphi^* g_{a,b}^k$  on  $S^\infty \times (\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}/\Lambda_{s_0} \setminus \{0\})$ .

We observe that  $\varphi^* g_{a,b}^k$  is an expression of the shape

$$\sum_{\lambda \in \Lambda'_{s_0} \setminus \{0\}} \chi'_\lambda \frac{P(\lambda)}{(Q(\lambda))^m}$$

where  $\chi'_\lambda : S^\infty \times (\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}/\Lambda_{s_0}) \rightarrow \mathbb{C}$  is the smooth function defined by  $\chi'_\lambda(s, u) = \exp(\langle \lambda, u \rangle)$  for all  $(s, u) \in S^\infty \times (\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}/\Lambda_{s_0})$ ,  $Q$  is a positively definite quadratic form on the lattice  $\Lambda_{s_0}$  and  $P$  is a homogeneous polynomial function of degree  $m$  on the lattice with values in some finite-dimensional vector space (this space is tensor product of three spaces : the symmetric power  $\text{Sym}^k(\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{C})$ , the space  $\bigwedge^\bullet \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{C}, \mathbb{C})$  and the space  $\bigwedge^\bullet \text{Span}_{\mathbb{C}}(dx_1, \dots, dx_{2r})$ ). The quadratic form and the polynomial are smooth functions on the base  $S^\infty$ .

Consider the convergent for  $s \in \mathbb{C}$  such that  $\Re(s) \gg 0$  series  $\mathcal{K}(Q, P, s)$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda'_{s_0} \setminus \{0\}} \chi'_\lambda \frac{P(\lambda)}{(Q(\lambda))^s}.$$

It converges uniformly with respect to the base. For rather big  $\Re(s)$  we have the following expression for the product  $\Gamma(s)\mathcal{K}(Q, P, s)$  of  $\mathcal{K}(Q, P, s)$  and the  $\Gamma$ -function ( $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$ ) :

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\mathcal{K}(Q, P, s) &= \sum_{\lambda \in \Lambda'_{s_0} \setminus \{0\}} \chi'_\lambda \Gamma(s) \frac{P(\lambda)}{(Q(\lambda))^s} = \int_0^\infty \sum_{\lambda \in \Lambda'_{s_0} \setminus \{0\}} \chi'_\lambda t^{s-1} e^{-t} \frac{P(\lambda)}{(Q(\lambda))^s} dt \\ &= \int_0^\infty \sum_{\lambda \in \Lambda'_{s_0} \setminus \{0\}} \chi'_\lambda e^{-t(Q(\lambda))} P(\lambda) t^{s-1} dt = \int_0^\infty (\Theta(Q, P, u, t) - P(0)) t^{s-1} dt, \end{aligned}$$

where  $\Theta(Q, P, u, t) = \sum_{\lambda \in \Lambda'_{s_0}} \exp(\langle \lambda, u \rangle) e^{-t(Q(\lambda))} P(\lambda)$  for  $u \in \Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}/\Lambda_{s_0}$ ,  $t \in \mathbb{R}^{>0}$ .

We split the domain of integration into two subdomains : from zero to some nonzero constant  $A$  and from  $A$  to infinity.

Over a compact subset on the base we have a bound  $Q(\lambda) > C \sum |\lambda_i|^2$  where  $\lambda_i$  are coordinates of  $\lambda$  with respect to some basis of  $\Lambda'_{s_0}$  and  $C$  is some positive real number. Hence for  $t \gg 0$  one have an uniform with respect to the base  $S$  bound  $(\Theta(Q, P, u, t) - P(0)) = O(\exp(-Kt))$ , so the integral from  $A$  to  $\infty$  converges for any  $s$ .

The integral from 0 to  $A$  can be calculated via Poisson summation formula. We recall this formula in our context. Let  $\text{vol}$  be a volume form on  $\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}$  such that the covolume of  $\Lambda_{s_0}$  equals 1. For a rapidly decreasing function  $f$  on  $\Lambda_{s_0}$  denote by  $\tilde{f}$  its Fourier transform with respect to the pairing  $\langle \cdot, \cdot \rangle : (\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}) \wedge (\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}(1)$  and the volume form  $\text{vol}$  :

$$\tilde{f}(p) = \int_{\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}} f(x) \exp(\langle x, p \rangle) \text{vol}_x, \quad p \in \Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}.$$

Then  $\sum_{\lambda' \in \Lambda'_{s_0}} f(\lambda') = \sum_{\lambda \in \Lambda_{s_0}} \tilde{f}(\lambda)$ .

Let  $h \in \Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}$  and let  $u$  be the image of  $h$  under the natural projection  $\Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R} \rightarrow \Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R} / \Lambda_{s_0}$ .

The value at  $p \in \Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}$  of the Fourier transform of the function  $\exp(\langle x, h \rangle) \exp(-tQ(x))P(x)$  in  $x \in \Lambda_{s_0} \otimes \mathbb{R}$  is equal to

$$\pi^d \text{Disc}(tQ)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\pi^2}{t} Q^\vee(p+h)\right) \hat{P}(p) = t^{-d} \pi^d \text{Disc}(Q)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\pi^2}{t} Q^\vee(p+h)\right) \hat{P}(p),$$

where  $\text{Disc}$  denotes the discriminant of the quadratic form with respect to the volume form  $\text{vol}$ ,  $Q^\vee$  is the dual (with respect to the pairing  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ) to  $Q$  quadratic form and  $\hat{P}$  is some polynomial of the same degree as  $P$ .

We denote the sum  $\sum_{\lambda \in \Lambda_{s_0}} e^{-t(\pi^2 Q^\vee(\lambda+h))} \hat{P}(\lambda)$  (which depends only on  $u$ ) by  $\hat{\Theta}(Q^\vee, \hat{P}, u, t)$ .

Then from the Poisson summation formula we get

$$\Theta(Q, P, u, t) = t^{-d} \pi^d \text{Disc}(Q)^{-1/2} \hat{\Theta}(Q^\vee, \hat{P}, u, t^{-1}).$$

Hence

$$\begin{aligned} \int_0^A (\Theta(Q, P, u, t) - P(0)) t^{s-1} dt &= \pi^d \text{Disc}(Q)^{-1/2} \int_0^A t^{-d} \hat{\Theta}(Q^\vee, \hat{P}, u, t^{-1}) t^{s-1} dt - P(0) \int_0^A t^{s-1} dt \\ &= \pi^d \text{Disc}(Q)^{-1/2} \int_{A^{-1}}^\infty \hat{\Theta}(Q^\vee, \hat{P}, u, x) x^{d-s-1} dx - P(0) \frac{1}{s} t^s|_0^A. \end{aligned}$$

For  $x \gg 0$  one has an uniform with respect to the base  $S$  and  $u \neq 0$  bound  $\hat{\Theta}(Q^\vee, \hat{P}, u, x) = O(\exp(-Kx))$ . So the first summand convergent integral is a smooth function in  $u \neq 0$  for any  $s$ . The second  $-P(0)A^s/s$  vanishes as  $P$  is homogeneous. This finishes the proof of the smoothness of the polylogarithmic currents.

□

## Références

- [BBD] A.A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Analyse et topologie sur les espaces singuliers, Astérisque 100.
- [BL] A.A. Beilinson, A. Levin, *The Elliptic Polylogarithm*, in U. Jannsen, S.L. Kleiman, J.P. Serre, “Motives”, Proceedings of the research Conference on Motives held July 20 - August 2, 1991, in Seattle, Washington, Proc. of Symp. in Pure Math. 55, Part II, AMS, p. 123–190 (1994).
- [B] D. Blottière, *Les classes d’Eisenstein des variétés de Hilbert-Blumenthal*, en préparation.
- [D] J. Dieudonné, *Éléments d’analyse*, Tome III, Éditions Jacques Gabay, 2003.
- [GH] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley Classics Library.
- [HZ] R. M. Hain, S. Zucker, *Unipotent variations in mixed Hodge structures*, Inv. Math. 88, p. 83–124 (1987).
- [I] B. Iversen, *Cohomology of sheaves*, Universitext, Springer-Verlag.
- [Ka] M. Kashiwara, *A study of variations of mixed Hodge structure*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 22, p. 991–1024 (1986).
- [Ki] G. Kings, *K-theory elements for the polylogarithm of abelian schemes*, J. reine angew. Math. 517, p. 103–116 (1999).
- [L] A. Levin, *Polylogarithmic Currents on Abelian Varieties*, in A. Reznikov, N. Schappacher (eds), “Regulators in Analysis, Geometry and Number Theory”, Proc. of the German-Israeli workshop held March 11–20 1996 at Landau Center, Jerusalem, Progress in Math. 171, Birkhäuser, p. 207–229 (2000).
- [S] M. Saito, *Mixed Hodge Modules*, Publ. RIMS Kyoto Univ. 26, p. 221–233 (2000).
- [T] A. Terras, *Harmonic analysis on symmetric spaces and applications I*, Springer-Verlag New York (1985).
- [W] J. Wildeshaus, *Realizations of polylogarithms*, L.N.M. 1650, Springer-Verlag Berlin (1997).